ANEXOS

ANEXO 1: Uso de la diferencial para calcular el área de la superficie de un círculo

ANEXO 2: Una respuesta a la "*paradoja*" del cálculo del volumen y el área de la superficie de una esfera

ANEXO 3: Ejemplos de uso de la diferencial para resolver problemas de Física

ANEXO 4: Relación de libros de texto y manuales utilizados para su análisis

ANEXO 5: Fragmentos literales que ilustran los resultados obtenidos en el análisis de libros de texto

ANEXO 6: Curso para profesores

Anexo 1

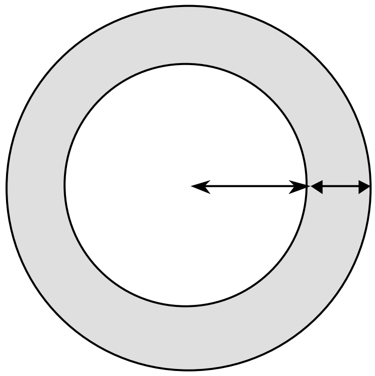
USO DE LA DIFERENCIAL PARA CALCULAR EL ÁREA DE LA SUPERFICIE DE UN CÍRCULO

En el capítulo 2 se explica la definición de Fréchet sobre la diferencial y sus características más importantes. En este anexo se muestra esta nueva concepción y algunas de sus características en la resolución de un problema habitual en la asignatura de Matemáticas para la enseñanza del Cálculo diferencial, como es obtener la expresión para el área de la superficie del círculo de radio *R*.

En la primera parte se hará la deducción a partir de la diferencial respecto del radio, y en la segunda respecto de una variable asociada a uno de los diámetros, mostrando así que las expresiones diferenciales pueden ser distintas -por tratarse de variables distintas- aunque el resultado final es el mismo.

1.1. Cálculo del área a partir de la diferencial respecto del radio

Es evidente que el área buscada (*A*) depende del radio del círculo (*R*), y por tanto buscamos una expresión del tipo: A=f(R). Deducir esa expresión, teniendo en cuenta la *condición de contorno*: $A(0)=0$, equivale a averiguar cuánto cambia el área (Ä*A*) cuando se produce un cambio en el radio desde R_0 hasta R_0+Ä*R*, correspondiente a la corona circular que se muestra en la Figura An1.I, sea cual sea R_0 y Ä*R*. (siempre que: R_0 + Ä*R* < *R*)



Para ello, como punto de partida más simple, buscamos una relación que refleje un comportamiento lineal: Ä*A*=g(R_0)· Ä*R*. Si este fuese el comportamiento real, el problema se acabaría al obtener g(R_0); sin embargo, la simple observación de la corona nos muestra que el doble de grosor no supone el doble de área, confirmando así un comportamiento no lineal. De esta forma, la relación lineal será una estimación, a partir de la cual y mediante el uso del Cálculo diferencial podremos llegar a la relación buscada.

Podemos hacer una primera estimación identificando esa corona con un rectángulo de altura Ä*R* y de base la longitud de la circunferencia interior (2ðR_0): ÄA_{est}=2ðR_0· Ä*R* Conviene advertir que esta estimación no coincide nunca con el valor real (Ä*A*), por muy pequeño que sea el valor de Ä*R*.

La expresión adelantada es lineal respecto al Ä*R*, y por tanto podría corresponder a la diferencial del área en R_0, algo que postulamos a modo de hipótesis, reflejada en la expresión[1]: d*A*=2ðR_0· d*R* Como el valor de R_0 puede ser cualquiera, podemos considerarlo como variable: *R*, de tal forma que la diferencial se convierte en una función de dos variables: d*A*(*R*,d*R*), sin limitación alguna para los valores de *R* y d*R*.

[1] Hemos escrito, por simetría en la expresión, d*R* en lugar de Ä*R*. Es evidente que, respecto de la variable *R*, son iguales ambas magnitudes, debido a que la función identidad sí es lineal.

¿Cómo podemos saber que nuestra hipótesis es correcta? Es decir, ¿cómo podemos saber que esa expresión corresponde, efectivamente, a la diferencial del área de la superficie del círculo? Como cualquier hipótesis, el procedimiento de verificación consiste en deducir alguna consecuencia directamente contrastable. Al tratarse de un comportamiento imaginario, no podemos contrastar directamente la hipótesis, pero sí podemos contrastar el resultado global al que conduce a través de la integral correspondiente (ver cap. 2, p. 75).

Antes de ello, en este caso podemos usar también otro procedimiento de verificación *a priori* (ver cap. 2, pp. 77-78). La expresión obtenida: 2ð$R\cdot$ dR es lineal respecto al dR, y además verifica: 2ð$R\cdot$ dR < ÄA < 2ð(R+dR)$\cdot$ dR, para todo R y dR. Como la función: 2ðR es continua, entonces A es diferenciable y su diferencial, con toda seguridad, es la que hemos adelantado.

La función diferencial nos ha permitido hacer una primera estimación del ÄA, de forma que: ÄA = dA + å, siendo en este caso: å>0. Podemos mejorar la estimación si tenemos en cuenta que å se acerca más a cero -aunque nunca lo alcanza- cuanto más pequeño es dR. Para ello, dividimos el ÄR en N trozos y sumamos la estimación del área correspondiente a cada trozo, cuyo valor será: dA_i=2ð$R_i\cdot$ dR_i, resultando entonces para el área buscada:

$$\text{Ä}A \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} \text{Ä}A_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} dA_i \quad + \quad \sum_{i=1}^{N} \text{å}_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} dA_i \quad + \quad \left(\textbf{\textit{error total}}\right)$$

Ese ***error total*** se acercará más a cero -aunque nunca lo alcanzará- cuanto mayor sea el número N de divisiones, es decir, cuanto menor sea el tamaño (ÄR_i) de cada una. El límite cuando N tiende a infinito, o cuando ÄR_i tiende a cero, será el mínimo valor del ***error total***; en concreto, ese límite será cero -aunque no lo sea ninguno de los términos de la serie- si se cumple:

$$\underset{N\to\infty}{lím}\left[N\cdot \text{å}_i\right] \quad = \quad \underset{\text{Ä}R_i\to 0}{lím}\left[\frac{\text{å}_i}{\text{Ä}R_i}\right] \quad = \quad \underset{\text{Ä}R_i\to 0}{lím}\left[\frac{\text{Ä}A_i - dA_i}{\text{Ä}R_i}\right] \quad = \quad 0 \quad , \quad \forall\, i$$

Podemos afirmar entonces que se obtiene un resultado exacto mediante el cálculo de este límite -es decir, mediante la *integral de Riemann*- si y sólo si el cociente diferencial: dA/dR coincide con la derivada, es decir, si: A'=2ðR Esta condición constituye la base de nuestra hipótesis al suponer que la estimación realizada es la diferencial. Por tanto:

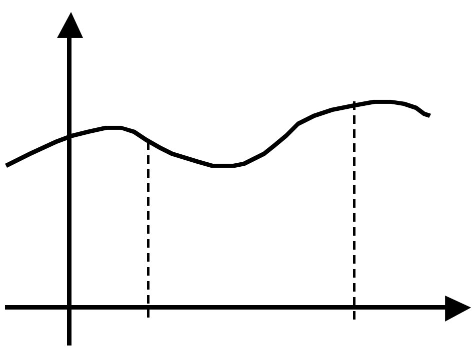
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} dA_i \quad = \quad \int_0^R 2ðR \cdot dR \quad = \quad ÄA \quad = \quad A(R) - A(0)\ , \quad \text{si y sólo si:} \quad \boldsymbol{A'(R) = 2ðR}$$

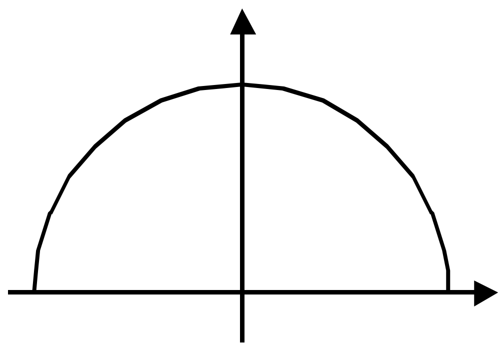
Aplicando reglas de antiderivación, resulta: $A(R)$ = ðR^2 + C, y teniendo en cuenta la condición de contorno: $A(0)=0$, entonces: $\boldsymbol{A(R) = ðR^2}$

Este resultado *exacto* sigue siendo tan hipotético como la expresión diferencial de la cual se ha derivado, pero ahora ya es directamente contrastable; su confirmación es la que nos garantiza en todos los casos que la expresión diferencial elegida no sólo cumple los requisitos formales sino que además es, entre las muchas posibles, la correcta. No obstante, en este caso particular, ya habíamos demostrado *a priori* (p. 393) que se trataba de la expresión diferencial correcta.

1.2. Cálculo del área a partir de la diferencial respecto de una variable asociada a un diámetro tomado como eje

Toda función continua del tipo $y=f(x)$, definida en un intervalo $[a,b]$ da lugar a una superficie limitada por la curva de esa función, el eje X, y las rectas $x=a$, $x=b$ (ver Gráfico An1.I). Como caso particular, la función: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ definida en el intervalo $[-R, R]$, da lugar al semicírculo limitado por la semicircunferencia (ver Gráfico An1.II).

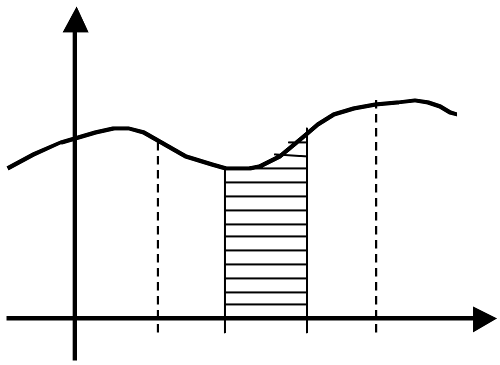


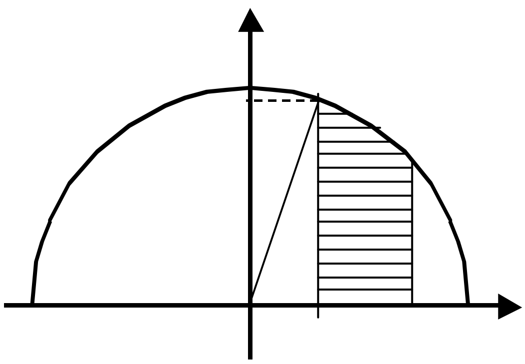


Aplicaremos la diferencial de Fréchet para calcular el área de la superficie limitada por una curva cualquiera, y lo concretaremos en el caso particular del área del semicírculo.

La función *A(x)* indica el área de la superficie limitada por la curva desde *a* hasta *x*, de forma que el área entre *a* y *b* vendrá dada por *A(b)* [en el caso particular de la semicircunferencia, *A(x)* será el área limitada por la semicircunferencia desde *-R* hasta *x*]. Si conseguimos averiguar cuál es el Ä*A* cuando se produce un cambio de variable desde x_0 hasta x_0 + Ä*x*, (∀ x_0, Ä*x*) entonces podremos obtener la función *A(x)*, teniendo en cuenta la condición de contorno: *A(a)*=0 [en particular: *A(-R)*=0].

El problema consiste entonces en obtener una expresión para calcular el área de la superficie rayada (∀ x_0, Ä*x*) que se muestra en los dos gráficos siguientes (Gráfico An1.III para el caso general, Gráfico An1.IV para el caso particular del semicírculo).





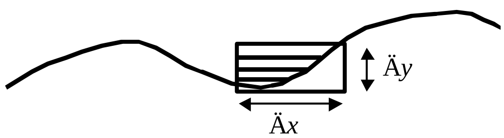
Como punto de partida, buscamos una relación que refleje un comportamiento lineal: Ä*A*=g(x_0)· Ä*x* Dado que el doble de grosor (Ä*x*) del área rayada no supone el doble de área (Ä*A*), a no ser que se trate de una función constante, este comportamiento es sólo una estimación, a partir de la cual y mediante el uso del Cálculo diferencial podremos llegar a la relación buscada.

Podemos hacer una primera estimación identificando Ä *A* con el área de un rectángulo de base Ä *x* y de altura *y*(x_0): ÄA_{est}=*y*(x_0)· Ä*x* (en particular:

$\text{Ä}A_{est} = \sqrt{R^2 - x_0^2} \cdot \text{Ä}x$) Dicha estimación no coincide nunca con el valor real (ÄA), por muy pequeño que sea el valor de Äx, y es lineal respecto al Δx. [2]

Debido a su carácter lineal, dicha estimación podría ser la diferencial del área en x_0, algo que postulamos **a modo de hipótesis**, reflejada en la expresión: dA=$y(x_0)\cdot$ dx (dx=Äx) [en particular: $dA = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx$] Como el valor de x_0 puede ser cualquiera, podemos considerarlo como variable: x, de tal forma que la diferencial se convierte en una función de dos variables: dA(x,dx), sin limitación alguna para los valores de x y dx.

Como es un comportamiento imaginario, no podemos contrastar directamente la hipótesis, pero sí el resultado global al que conduce a través de la integral correspondiente (ver cap. 2, p. 75). Antes de ello, en este caso podemos usar también otro procedimiento de verificación *a priori* (ver cap. 2, p. 78). Es fácil apreciar en la figura An1.II que el error cometido (área rayada), en valor absoluto: |ÄA - dA| es menor que el área del rectángulo de lados Äy, Äx, sea cual sea la función continua $y(x)$. Es decir: $0 \leq |\text{Ä}A - dA| \leq \text{Ä}x \cdot \text{Ä}y$



Si dividimos el área de ese rectángulo por Äx, y calculamos el límite:

$$0 \leq \lim_{\text{Ä}x \to 0} \frac{|\text{Ä}A - dA|}{\text{Ä}x} < \lim_{\text{Ä}x \to 0} \text{Ä}y$$

---

[2] La elección del rectángulo como forma geométrica para realizar la estimación no es arbitraria. Si se hubiese aproximado, por ejemplo, el ÄA al área de un trapecio de bases $y(x_0)$, $y(x_0$+Ä$x)$, la expresión resultante [½Ä$x\cdot$ ($y(x_0)$+$y(x_0$+Ä$x)$)] no hubiera sido lineal respecto al Äx.

Al tratarse de una función continua, el último miembro de esa inecuación es cero. Por tanto, puede asegurarse que la hipótesis es cierta: dA=$y(x)$· dx, es decir, que verdaderamente se trata de la expresión diferencial.

De esta forma, para el caso particular de la diferencial del área del círculo hemos demostrado la validez de dos expresiones diferenciales: dA=2ðR· dR, $dA = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx$ Este resultado podría llevar a pensar que la diferencial no es única, pero no puede obtenerse esa conclusión ya que se trata de diferenciales respecto de dos variables distintas: d$A(R.$d$R)$, d$A(x,$d$x)$. Si se intenta hacer otra estimación del área respecto de la variable x, por ejemplo aproximando ese área por trapecios, el resultado no es lineal respecto al Äx (ver nota a pie de página nº 33), pero si se hace un desarrollo de la expresión obtenida se comprueba que el término lineal es precisamente la expresión diferencial respecto a la variable x que ya hemos adelantado haciendo la aproximación mediante rectángulos. Debe quedar fuera de toda duda el carácter único de la expresión diferencial.

Nos proponemos ahora deducir el resultado exacto al que puede conducir la estimación realizada. Podemos acercarnos más al resultado buscado (ÄA) si dividimos el intervalo Äx en N subintervalos y sumamos la estimación del área correspondiente a cada trozo que nos proporciona la estimación diferencial (ÄA = dA + å):

$$\text{Ä}A = \sum_{i=1}^{N} \text{Ä}A_i = \sum_{i=1}^{N} dA_i + \sum_{i=1}^{N} \text{å}_i = \sum_{i=1}^{N} dA_i + \left(\textbf{\textit{error total}}\right)$$

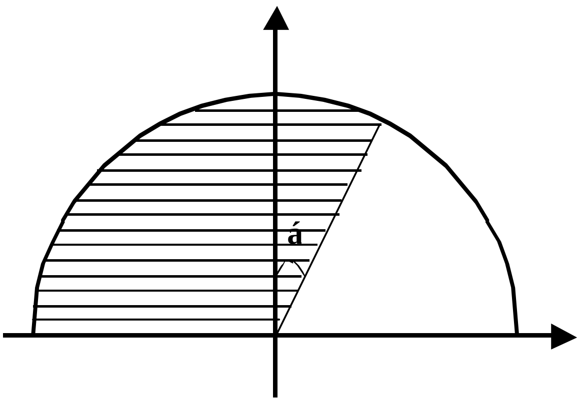
Ese ***error total*** se acercará más a cero -aunque nunca lo alcanzará- cuanto mayor sea el número N de subintervalos, es decir, cuanto menor sea el tamaño (Äx_i) de cada uno de ellos. El límite cuando N tiende a infinito, o cuando Äx_i tiende a cero, será el mínimo valor del ***error total***; en concreto, ese límite será cero -aunque no lo sea ninguno de los términos de la serie- si se cumple:

$$\underset{N \to \infty}{lím} \left[N \cdot \text{å}_i\right] = \underset{\text{Ä}R_i \to 0}{lím} \left[\frac{\text{å}_i}{\text{Ä}R_i}\right] = \underset{\text{Ä}R_i \to 0}{lím} \left[\frac{\text{Ä}A_i - dA_i}{\text{Ä}R_i}\right] = 0 \quad , \quad \forall\, i$$

Podemos afirmar entonces que se obtiene el resultado exacto mediante el cálculo de este límite, es decir, mediante la *integral de Riemann*, si y sólo si el cociente diferencial: d*A*/d*x* coincide con la derivada, es decir, si: *A'=y(x)*. Esta condición constituye la base de nuestra hipótesis al suponer que la estimación realizada es la diferencial. Por tanto:

$$\underset{N\to\infty}{lím} \sum_{i=1}^{N} dA_i \quad = \quad \int_0^R 2ðR \cdot dR \quad = \quad ÄA \quad = \quad A(R) - A(0)\ , \qquad \text{si y sólo si: } \boldsymbol{A'(R) = 2ðR}$$

En el caso particular en que la curva en cuestión sea una circunferencia, y por tanto la superficie sea un semicírculo, entonces debemos aplicar reglas de antiderivación para que: $A'(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ Después de un cambio de variable: *x=R sená* (ver gráfico An1.V), el resultado es: $A(á) \quad = \quad \frac{R^2}{2}\left(á + \frac{sen\ 2á}{2}\right) \quad + \quad C$



La condición de contorno conocida: *A(-R)*=0 nos permite fijar el valor de esa constante, pues si: *x*=-R entonces: á=-ð/2, de forma que para que: *A*(-ð/2)=0, debe ser: *C*=ðR^2/4

El área de una porción del semicírculo determinada por el ángulo *á* (= arcsen *x*/*R*), vendrá dada entonces por la siguiente expresión:

$$A(\text{á}) = \frac{R^2}{2}\left(\text{á} + \frac{sen\ 2\text{á}}{2}\right) + \frac{\text{ð}R^2}{4}$$

El área del semicírculo completo será: *A(R)* = *A*(ð/2) = ðR^2/2. **Para todo el círculo:** $\boldsymbol{A=\text{ð}R^2}$

Aunque ya habíamos demostrado *a priori* que la expresión diferencial elegida era la correcta, y que por tanto nos debía conducir al resultado exacto y real mediante la integral correspondiente, la comprobación experimental de este resultado corroborará su validez y, por tanto, la de la expresión diferencial.

Anexo 2

UNA RESPUESTA A LA *PARADOJA* DEL CÁLCULO DEL VOLUMEN Y EL ÁREA DE LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA

Como ya se ha explicado en los dos primeros capítulos, la identificación de la diferencial con las cantidades infinitesimales no es una garantía suficiente para que la integral correspondiente proporcione un resultado global o *macroscópico* exacto, de forma que el error total cometido sea cero. Al contrario, todas las aproximaciones posibles mediante cantidades infinitesimales -todas, menos una- conducen a un resultado global donde el error total no es cero. Este comportamiento puede dar lugar a numerosas paradojas, algunas de ellas puestas de manifiesto a lo largo de la historia, como por ejemplo la descrita por Torricelli en “Campo di tartufi” (citado por Schneider, 1991).

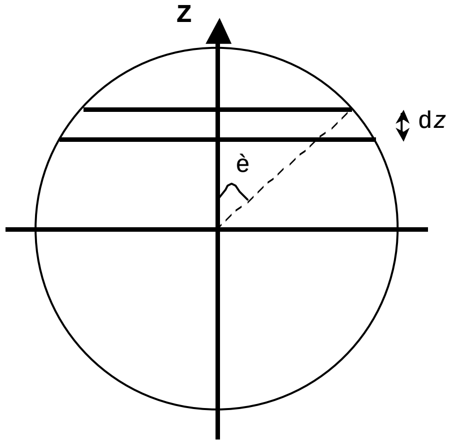
Estos posibles resultados paradójicos usando el Cálculo diferencial son evitados de forma sistemática en la enseñanza habitual del Cálculo, pues se parte siempre de la expresión diferencial acertada, entre las muchas que se ajustan a la definición de cantidad infinitesimal. No se dan razones para escoger precisamente esa expresión, y si acaso se recurre a supuestos argumentos experimentales; sin embargo, hemos mostrado ya que la hipótesis diferencial no es contrastable directamente, sino el resultado al que conduce. Este uso del Cálculo diferencial es coherente, por otra parte, con un planteamiento más general de la enseñanza, basado en un aprendizaje repetitivo y aproblemático, interesado más en la reproducción de respuestas que en la discusión y el desarrollo de la capacidad para enfrentarse con situaciones novedosas.

En la segunda parte del **Anexo 1** hemos demostrado que la expresión diferencial del área de la superficie limitada por la curva de una función *y(x)* es: $dA=y(x)\cdot dx$, y estamos seguros de su veracidad tanto por una demostración *a priori* como por la validez de los resultados a los que conduce. Sin embargo, en la enseñanza habitual del Cálculo, en concreto en la resolución de este tipo de problemas geométricos, rara vez se discute la validez de la expresión diferencial sino que se acepta como punto de partida como si no hubiese otro posible, o como si cualquier otra expresión, con tal de ser *muy pequeña*, condujese al mismo resultado. Se deposita así todo el peso de la prueba en el supuesto rigor del tratamiento diferencial que se hace después: construcción de la integral, cálculo de antiderivadas...

Como muestra de esta actitud en el uso del Cálculo diferencial, Artigue y Viennot (1987) describen una cuestión que han pasado a once estudiantes universitarios implicados en un curso específico sobre el Cálculo diferencial, y presentan los resultados obtenidos. En el Cuadro An2.I se presenta el enunciado y la pregunta literal de esa cuestión.

Cuadro An2.I. Cuestión original sobre un resultado paradójico para el área de la superficie de una esfera (Artigue y Viennot, 1987)

Para calcular el volumen de una esfera de radio *R*, podemos descomponerla en rodajas elementales paralelas a un plano de simetría de la esfera (por ejemplo el plano XOY, como en el dibujo) y espesor d*z*.



Se asimila entonces el volumen d*V* de una pequeña rodaja a la altura *z* con el de un cilindro del mismo espesor d*z* que tiene por sección recta una de las caras planas de la rodaja de la esfera considerada: $dV = ð\, r^2 dz = ð\left(R^2 - z^2\right) dz$

Por tanto, el volumen total es: $V = \int_{-R}^{+R} ð\left(R^2 - z^2\right) dz = \frac{4}{3}\, ð\, R^3$

Si utilizamos el mismo método (que consiste en asimilar rodaja de esfera y cilindro) para calcular la superficie de la esfera, se obtiene, para el área lateral de una rodaja elemental a la altura *z*: $dS = 2\, ð\, r\, dz = 2\, ð \sqrt{R^2 - z^2}\, dz$

por tanto para el área total: $S = 2\, ð \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - z^2}\, dz = 2\, ð\, R^2 \int_0^{ð} sen^2 è\, dè = \boldsymbol{ð^2 R^2}$

¿Puede explicar porqué el mismo método conduce, en el primer caso a un resultado correcto y en el segundo caso a un resultado falso?

Las autoras indican que sólo un estudiante dio una respuesta que ponía en cuestión la expresión diferencial de partida. Por nuestra parte, hemos pasado esa misma cuestión a muchos profesores de secundaria que han asistido a nuestro curso sobre la introducción y uso de la diferencial, y podemos corroborar la sorpresa de la mayoría de ellos después de comprobar que los límites de la integral eran correctos, que el cálculo de primitivas era también correcto, que las operaciones realizadas no tenían error... Incapaces de dar la explicación solicitada por la pregunta, incapaces de hacer una crítica de la solución propuesta, sólo llegaban a presentar un desarrollo alternativo que concluyese en el resultado correcto.

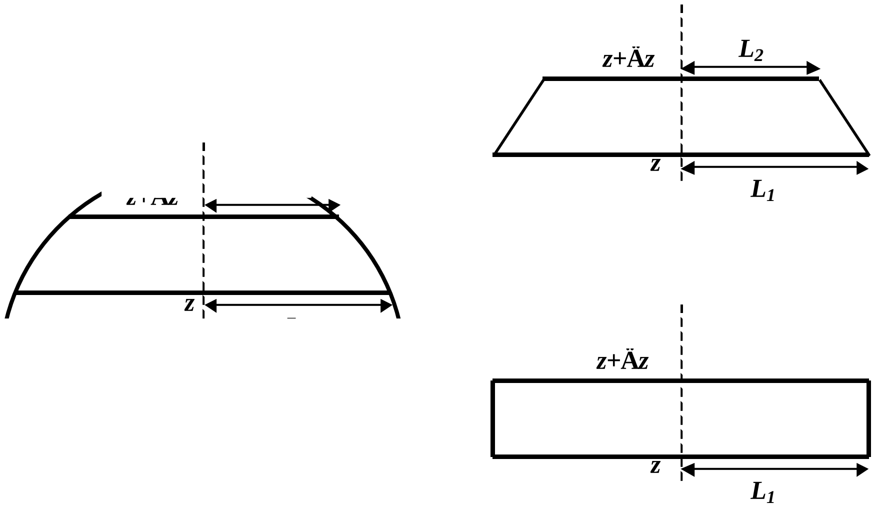
Cuando hemos pasado esta cuestión, sólo pretendíamos averiguar cuántos señalaban a la expresión diferencial como un *eslabón débil* del razonamiento, como una posible fuente de error, apoyándose en el resultado incorrecto al que conduce. Si embargo, como la diferencial utilizada cumple bs *supuestos* requisitos que se le debe exigir a toda diferencial -tratarse de cantidades muy pequeñas-, prácticamente ningún profesor llega a señalarla como la causa del error cometido.

Pero no es preciso apoyarse únicamente en lo incorrecto del resultado obtenido para falsar la expresión diferencial planteada. Como ya hemos explicado en el capítulo 2 (pp. 77-78) -y se ha ejemplificado en cada apartado del **Anexo 1**-, a veces pueden hacerse demostraciones *a priori* sobre la validez o falsedad de la expresión diferencial. En concreto, podemos demostrar que la supuesta expresión diferencial es incorrecta si encontramos una magnitud (Ä*M*) que verifique: Ä*M* |Ä*A*-d*A*|, ∀ *z*, Ä*z* (o al menos cuando Ä*z* tiende a cero), y además se demuestra que Ä*M*/Ä*z* **no** tiende a cero cuando Ä*z* tiende a cero.

Para llevar a cabo la demostración utilizaremos tres cuerpos geométricos de la misma altura (d*z*):

- el trozo de esfera, de área lateral: **Ä*A***
- un tronco de cono, de área lateral: $\boldsymbol{A_t}$
- un cilindro, de área lateral: $\boldsymbol{A_c}$

En la Figura An2.I se representan los tres cuerpos.



La hipótesis que vamos a intentar falsar afirma que A_c es precisamente *dA*, es decir, que: $\underset{\text{Ä}z\to 0}{\text{lím}} \frac{\text{Ä}A - A_c}{\text{Ä}z} = 0$ **,** $\forall\ z$

En los tres casos se cumple: $L_1 = \sqrt{R^2 - z^2}$ **,** $L_2 = \sqrt{R^2 - (z + \text{Ä}z)^2}$

Al coincidir las bases, es evidente que: $\text{Ä}A > A_t$. Si demostramos que: $A_t > A_c$ -al menos cuando dz tiende a cero y para algunos valores de z-, entonces en esos casos podemos establecer la siguiente relación de orden: $\text{Ä}A > A_t > A_c$ En tales casos se cumplirá:

$$\underset{\text{Ä}z\to 0}{\text{lím}} \frac{\text{Ä}A - A_c}{\text{Ä}z} > \underset{\text{Ä}z\to 0}{\text{lím}} \frac{A_t - A_c}{\text{Ä}z}$$

Si demostramos que el segundo miembro de esta inecuación no es siempre cero, con mayor razón quedará demostrado que el primer miembro tampoco es siempre cero, falsando así la hipótesis diferencial de partida.

Para demostrar que, en ocasiones, $A_t > A_c$, partimos de la expresión general del área lateral del tronco de cono:

$$A_t = ð \cdot (L_1 + L_2) \cdot generatriz = ð \cdot (L_1 + L_2) \cdot \sqrt{(L_1 - L_2)^2 + (Äz)^2}$$

Haciendo un desarrollo en serie en torno a $Äz=0$, y despreciando términos de orden superior a $Äz$, obtenemos:

$$\begin{aligned} A_t &= ð \cdot (L_1 + L_2) \cdot (L_1 - L_2) + \left[ð \cdot (L_1 + L_2) \cdot \frac{Äz}{\sqrt{(L_1 - L_2)^2 + (Äz)^2}} \right]_{(Äz=0)} \cdot Äz + \cdots = \\ &= ð \cdot (L_1^2 - L_2^2) \quad + \quad ï\left(Äz^2\right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el área lateral del cilindro es: $2ðL_1 \cdot Äz$, se cumplirá: $A_t > A_c$ siempre que: $L_1^2 - L_2^2 > 2ðL_1 \cdot Äz$. Si consideramos ahora que tanto el cilindro como el tronco de cono se han construido a partir del trozo de esfera, y por tanto los valores de L_1 y L_2 no son cualesquiera sino los que se han indicado más arriba, entonces esa condición se transforma en:

$$z^2 > R^2 - z^2 \quad \Leftrightarrow \quad z > \frac{R}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad A_t > A_c \qquad \text{(siempre: } Äz \to 0\text{)}$$

Esta condición es cumplida por muchos puntos: $z \in [0, R]$, y para todos ellos: $ÄA > A_t > A_c$, al menos cuando $Äz$ tiende a cero. En esas condiciones, y para esos puntos:

$$\underset{Äz \to 0}{lím} \frac{A_t - A_c}{Äz} = \underset{Äz \to 0}{lím} \frac{ð \cdot 2z \cdot Äz \quad - \quad 2ð\sqrt{R^2 - z^2} \cdot Äz}{Äz} = 2ð\left(z - \sqrt{R^2 - z^2}\right)$$

En todos los puntos mencionados, ese resultado es distinto de cero y, por tanto, con mayor razón, en todos esos puntos se cumplirá:

$$\underset{Äz \to 0}{lím} \frac{ÄA - A_c}{Äz} \neq 0 \quad , \quad \text{al menos para: } \; z > \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Queda *falsada* así la hipótesis: dA = A_c, razón por la cual el resultado obtenido sumando A_c no coincide con el valor real del área de la superficie de la esfera.

Anexo 3

PROBLEMAS DE FÍSICA RESUELTOS PARA ILUSTRAR EL USO DE LA *NUEVA* CONCEPCIÓN DE LA DIFERENCIAL Y DE LA ESTRATEGIA GLOBAL DEL CÁLCULO

En el capítulo 2 se ha mostrado una *nueva* concepción de la diferencial y su relación con los conceptos de derivada e integral, lo que nos ha permitido identificar un conjunto de indicadores de lo que constituye una adecuada comprensión del uso de la diferencial en la Física. En los **Anexos 1** y **2** se ha usado esta concepción de la diferencial para hacer cálculos de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. En este Anexo pretendemos aplicar la *nueva* concepción para resolver problemas de Física, con la intención de mostrar las ideas principales en las que se basa y, sobre todo, su potencialidad para hacer uso del estrategia del Cálculo con una verdadera comprensión de lo que se hace y por qué se hace, contribuyendo a clarificar el contenido físico de los mismos. Debe advertirse, no obstante, que la resolución que se presenta no pretende constituir una propuesta didáctica concreta; de este problema nos ocupamos en la segunda parte de nuestro trabajo.

Hemos seleccionado tres problemas, del mismo tipo de los que aparecen en cualquier libro de Física General:

P1: Cálculo de la **intensidad del campo eléctrico** creado por un filamento uniformemente cargado

P2: Cálculo del **flujo magnético** que atraviesa una espira rectangular, debido al campo creado por una corriente rectilínea

P3: Cálculo de la **temperatura** de un cuerpo que se está enfriando

P1: **Dado un filamento recto de longitud L, cargado con una densidad uniforme de carga λ, determinar la intensidad del campo eléctrico creado por el filamento en un punto P situado sobre el mismo eje del filamento a una distancia D de uno de sus extremos.**

Teniendo en cuenta la simetría del problema, la intensidad del campo eléctrico en el punto **P** tendrá la misma dirección que el filamento, y su sentido quedará determinado por el signo de la carga. Por tanto, el problema se reduce a averiguar el módulo de la intensidad: *E*.

Existe un conjunto de magnitudes físicas independientes que influyen en el valor de la intensidad del campo eléctrico en ese punto: la densidad lineal de carga (ë), la longitud del hilo (*L*), la distancia entre el punto y el extremo del hilo (*D*), la constante eléctrica del medio (*K*)... Es decir, nuestro objetivo es obtener una expresión funcional del tipo: *E*=f(ë*, L, D, K*...).

Para reducir el problema al caso de una sola variable, considerando constantes las demás magnitudes, existen cuatro posibilidades para iniciar el estudio: *E*=f(λ), *E*=f(*L*), *E*=f(*D*), *E*=f(*K*). Cualquiera de ellas conducirá a una expresión global en la que cabe esperar que aparezcan las cuatro magnitudes. Para cada caso, se conoce además una *condición de contorno*: *E*=0 cuando λ=0, *E*=0 cuando *L*=0, *E*=0 cuando *D*= , *E*=0 cuando *K*=0.

Según cual sea la variable elegida, se trata de averiguar cuánto cambia E cuando se produce...

- ... un cambio de densidad lineal desde ë$_1$ hasta ë$_1$+Äë
- ... un cambio de longitud desde L_1 hasta L_1+ÄL (ver fig. An3.II)
- ... un cambio de distancia desde D_1 hasta D_1+ÄD (ver fig. An3.III)
- ... un cambio de medio desde K_1 hasta K_1+ÄK

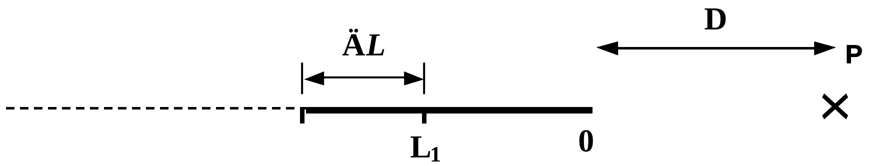


Figura An3.II. ¿Cuál es el ÄE producido por un ÄL?

Figura An3.III. ¿Cuál es el ÄE producido por un ÄD?

El punto de partida, en cada caso, será una relación que refleje el comportamiento más simple, es decir, un comportamiento lineal:

ÄE = g_1(ë$_1$, L_1, D_1, K_1)· Äë

ÄE = g_2(ë$_1$, L_1, D_1, K_1)· ÄL

ÄE = g_3(ë$_1$, L_1, D_1, K_1)· ÄD

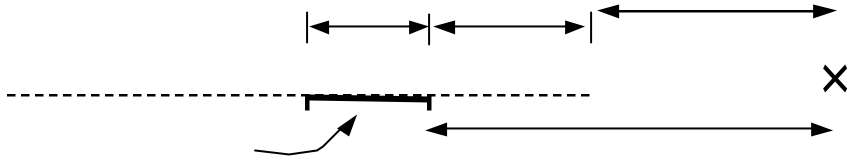
ÄE = g_4(ë$_1$, L_1, D_1, K_1)· ÄK

Si alguna de esas relaciones fuese conocida, y además fuese lineal, el problema estaría ya resuelto. En el caso de las variables ë y K, podría esperarse un comportamiento lineal, pero no disponemos de argumentos sólidos para adelantar el valor de los respectivos coeficientes –en este caso constantes-: g_1, g_4. En cuanto a las otras variables, se trata de comportamientos claramente no lineales, y en lugar de adelantar directamente la expresión correspondiente, se aplicará la estrategia propia del Cálculo diferencial, adquiriendo así mayores garantías de éxito.

La expresión diferencial correspondiente a cualquiera de las variables (*L* ó *D*) debe ser avanzada a título de hipótesis, y contrastada a través del resultado global al que conduce. Por ello, el criterio para seleccionar una u otra variable será aquella cuya expresión diferencial hipotética encuentre un apoyo más firme en el análisis físico de la situación.

En concreto, la relación: dE=g(ë$_1$, L_1, D_1, K_1)· dL expresa cuánto cambiaría E cuando se incorpora a un hilo de longitud L_1 un trozo nuevo ÄL (=dL), suponiendo un comportamiento lineal. Como el comportamiento real no es lineal, esa expresión corresponderá a un comportamiento imaginario e hipotético, no deducible por tanto experimentalmente sino a través del conocimiento teórico y del análisis físico. Del mismo modo, la relación: dE=g(ë$_1$, L_1, D_1, K_1)· dD expresa cuánto cambiaría E cuando aumenta la distancia del punto al extremo del hilo (D_1) en un valor ÄD (=dD), suponiendo un hipotético comportamiento lineal.

No se dispone de argumentos sólidos para adelantar la expresión diferencial respecto a la variable *D*, pero sí respecto a la variable *L*. Como añadir un nuevo trozo ÄL supone añadir una nueva carga: ë· ÄL (ver fig. An3.IV), se puede usar la expresión ya conocida para el módulo de la intensidad del campo eléctrico creado por un cuerpo puntual de carga q en un punto situado a una distancia r $\left(E = K \cdot \frac{q}{r^2}\right)$, que es precisamente lineal respecto a la carga.



Sustituyendo en esa expresión el valor de la carga (q) por la del trozo de hilo (ë· ÄL), entonces: $\text{Ä}E = K \cdot \dfrac{\text{ë} \cdot \text{Ä}L}{r^2}$

Pero r varía a lo largo de ese trozo desde $D+L_1$ hasta $D+L_1+$ÄL, lo que es un reflejo del comportamiento no lineal de ÄE en función de ÄL; si se considera que r mantiene el valor inicial ($r=D+L_1$), se trata de un *hipotético* comportamiento lineal que equivale físicamente a suponer que toda la carga del trozo ÄL se concentra en el extremo L_1, hipótesis que se expresa mediante la expresión diferencial:

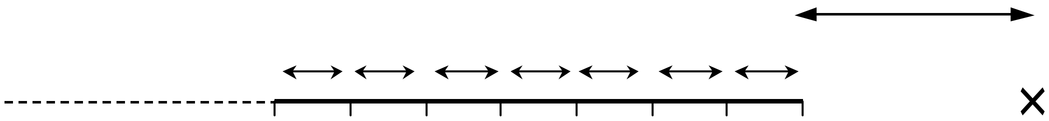
$$dE = K \cdot \frac{\text{ë} \cdot \text{Ä}L}{(D+L_1)^2} = K \cdot \frac{\text{ë} \cdot dL}{(D+L_1)^2}$$

Se trata de una estimación, lineal respecto a ÄL, que depende tanto de L_1 como de ÄL, sin que exista restricción alguna para los valores de L_1 e ÄL; se postula a modo de hipótesis que esa estimación es la diferencial. Como la expresión adelantada es válida para cualquier L_1, se puede considerar la longitud inicial del filamento como variable: L, y la diferencial como función de dos variables: d$E(L,$ d$L)$, lineal respecto al dL.

La primera estimación que se puede realizar es calcular directamente el dE creado por todo el hilo, es decir, cuando $L=0$ y d$L=L$, en cuyo caso: $dE\,\mathbf{(}0\mathbf{,}\,L\mathbf{)} = K \cdot \dfrac{\text{ë} \cdot L}{D^2}$ Esta expresión constituye una estimación del campo creado por todo el filamento, pues ya sabemos que E es nulo cuando $L=0$; dicha estimación se ha obtenido suponiendo que toda la carga del hilo (ë· L) se encuentra concentrada en su extremo más cercano al punto **P**, por lo que el valor estimado sobrepasa al valor real. Después de hacer esta primera estimación, cabe preguntarse: *¿puede mejorarse esta estimación? ¿se puede llegar, mediante esta mejora, a obtener una respuesta para el valor buscado de E, sin error ninguno?*

La relación entre ÄE y dE, para cualquier L y ΔL, es la siguiente: ÄE = dE + å, siendo ese **error** (å) negativo, ya que se ha realizado una estimación por exceso al considerar que toda la carga del trozo adicional de hilo se coloca en la posición más cercana al punto **P**. El valor absoluto de ese error es creciente con el valor de Ä*L.*

Teniendo en cuenta que el error cometido se acerca más a cero cuanto menor es Ä*L*, un procedimiento de mejora de la estimación del *E* creado por todo el filamento será dividirlo en *N* trozos y sumar la estimación del campo creado por cada trozo en **P** (ver fig. An3.V).



La estimación del campo creado por cada trozo será: $dE_i = K \cdot \frac{ë \cdot ÄL_i}{(D + L_i)^2} = K \cdot \frac{ë \cdot dL_i}{(D + L_i)^2}$

Sea cual sea el tamaño ($ÄL_i$) de ese trozo, es decir, sea cual sea el número N de subdivisiones, esa estimación nunca coincidirá con el $ÄE_i$ correspondiente, existiendo un cierto error ($å_i$<0): $ÄE_i = dE_i + å_i$

La suma de las N estimaciones (ÓdE_i) *se acerca* al $ÄE$ total:

$$ÄE = \sum_{i=1}^{N} ÄE_i = \sum_{i=1}^{N} dE_i + \sum_{i=1}^{N} å_i = \sum_{i=1}^{N} dE_i + (\textbf{\textit{error total}})$$

Ese ***error total*** es decreciente respecto al número de subdivisiones (N), pero nunca podrá ser cero. Se puede construir una serie de ***errores totales*** obtenidos para distintos valores de N, y estudiar su convergencia cuando N tiende a infinito o, lo que es lo mismo, cuando cada $ÄL_i$ tiende a cero ($N = cte \cdot \frac{1}{ÄL_i}$) Teniendo en cuenta que en este caso los errores son negativos, y llamando å al más alejado de cero de los $å_i$ (es decir: $|å_i|$ $|å|$, $\forall i$), entonces:

$$0 \geq \lim_{N \to \infty} [\textbf{\textit{error total}}] \geq \lim_{N \to \infty} [N \cdot å] = cte \cdot \lim_{ÄL_i \to 0} \left[\frac{å}{ÄL_i} \right]$$

Para que ese límite sea cero, no basta que cada $å_i$ tienda a cero, sino que lo haga el cociente: $å/ÄL_i$, y con más razón: $å_i/ÄL_i$, $\forall i$ Es decir, no basta que dE y $ÄE$

coincidan cuando Ä*L* tienda a cero (y toman el valor nulo, evidentemente), sino que es preciso exigir: $\lim\limits_{\text{Ä}L \to 0} \dfrac{\text{Ä}E - dE}{\text{Ä}L} = 0$

Esta condición es equivalente a exigir que el cociente diferencial: d*E*/d*L* coincida con la derivada: *E'*. En este caso, el límite cuando *N* tiende a infinito de la suma de estimaciones (ÓdE_i) será el valor buscado (Ä*E*), sin error alguno. Usando la notación integral:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} dE_i = \int_0^L \frac{K \cdot \text{ë}}{(D+L)^2}\, dL = \text{Ä}E = E(L) - E(0)$$

si, y sólo si, se cumple: $E' = \dfrac{dE}{dL} = K \dfrac{\text{ë}}{(D+L)^2}$

Al avanzar a título de hipótesis la expresión diferencial de partida ($dE = K \cdot \dfrac{\text{ë} \cdot dL}{(D+L)^2}$), no sólo estábamos escribiendo una estimación lineal respecto al Ä*L*, sino que además estábamos *suponiendo* que cumplía la condición que acabamos de exigir. La validez de esa hipótesis dependerá de la validez del resultado global (Ä*E*) que obtengamos.

La *antiderivada* de *E'* es: $E = -K \dfrac{\text{ë}}{L+D} + C$ Teniendo en cuenta que *E*(0)=0, y por tanto *C*=*K*· ë/*D*, el resultado de la integral será:

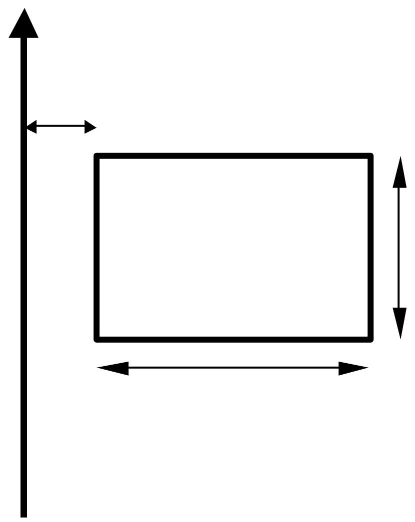
$$\int_0^L dE = E(L) = K \frac{\text{ë} \cdot L}{D \cdot (L+D)}$$

Los argumentos utilizados para adelantar la expresión diferencial proporcionan ciertas garantías de que ese resultado coincide con el real; no obstante, no es el uso del Cálculo diferencial -con su apariencia de rigor- el que asegura esa coincidencia, sino la coherencia del resultado con el marco teórico y con los datos experimentales. En última instancia, la contrastación de la validez del resultado final será quien validará la hipótesis diferencial de partida.

Aunque el Cálculo diferencial de una variable se ha utilizado para obtener el comportamiento: $E(L)$, la solidez de los argumentos utilizados para escribir la expresión diferencial se refiere no sólo al comportamiento $dE=f(L,dL)$ sino también al resto de los coeficientes considerados constantes ($ë_1$, D_1, K_1). Cabe esperar entonces que el resultado final sea válido, no sólo como función de una variable, sino también si se interpreta como una función de cuatro variables: $ë$, L, D, K

P2: Una espira rectangular se encuentra en el mismo plano que un hilo rectilíneo muy largo, de forma que el hilo se encuentra cercano y paralelo a uno de los lados de la espira. Calcula el flujo magnético que atraviesa la espira cuando por el hilo circula una cierta intensidad de corriente eléctrica.

En la Figura An3.VI se representa mediante un dibujo la situación que se describe en el enunciado del problema, fijando algunos de los parámetros geométricos.



De acuerdo con el sentido de la corriente elegido, el hilo rectilíneo crea un campo magnético en la superficie de la espira, cuya intensidad es perpendicular al plano del papel y de sentido entrante. El módulo de la intensidad de ese campo en un punto viene dado por la ley de Biot: $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$, siendo µ la permeabilidad magnética del medio y r la distancia entre el punto y el hilo.

El flujo (Φ) es una medida de la cantidad de campo magnético que atraviesa esa superficie, y cuando el campo es uniforme y perpendicular a la superficie se calcula mediante la siguiente expresión: $\Phi = B \cdot A$, siendo A el área de la superficie en cuestión.

En el caso planteado en el problema *B* no es el mismo en todos los puntos de la superficie, y por tanto Ö no es lineal respecto a *A*. En efecto, el doble de área no se traduce en el doble de Ö, aunque s í llegue a cumplirse esa relación en el caso particular en que el aumento de área se produzca aumentando únicamente el lado *b*.

Teniendo en cuenta que la geometría del problema impone un distinto comportamiento según el cambio de área que se produzca, y conociendo además la ley de Biot antes citada, podemos afirmar que Ö depende de las siguientes variables independientes: Ö=f(μ, *I*, *b*, *a*, *D*). Para tratar el problema como si fuese de una sola variable, debemos seleccionar una de ellas y considerar a las demás como si fuesen constantes. Se nos presentan así cinco posibles opciones:

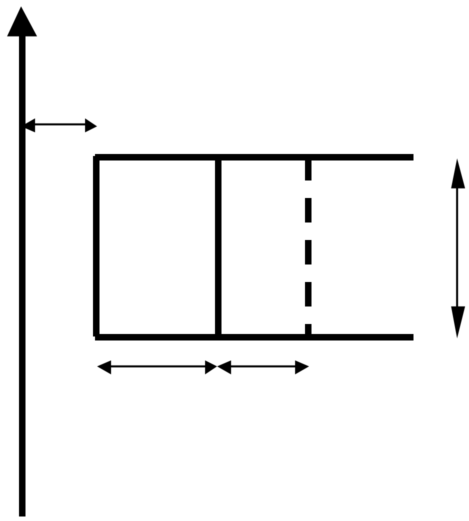
i) **Ö=f(μ)** Se trata de buscar la expresión que relaciona el flujo con la permeabilidad magnética del medio; conociendo la *condición de contorno*: Ö(0)=0, se trata entonces de averiguar cuánto cambia el flujo cuando se produce un cambio de permeabilidad desde μ_0 hasta μ_0+Äμ.

El punto de partida más simple será un comportamiento lineal: ÄÖ = g(μ_0, I_0, b_0, a_0, D_0)· Äμ Teniendo en cuenta la influencia de μ en la intensidad del campo, cabe esperar que dicha relación sea realmente lineal, pero la dificultad estriba en que **no disponemos de argumentos para deducir o adelantar con seguridad el coeficiente *g***.

ii) **Ö=f(*I*)** Es un problema idéntico al de la variable anterior, pues se trata de una función lineal en realidad pero no disponemos de argumentos para obtener la pendiente de esa función.

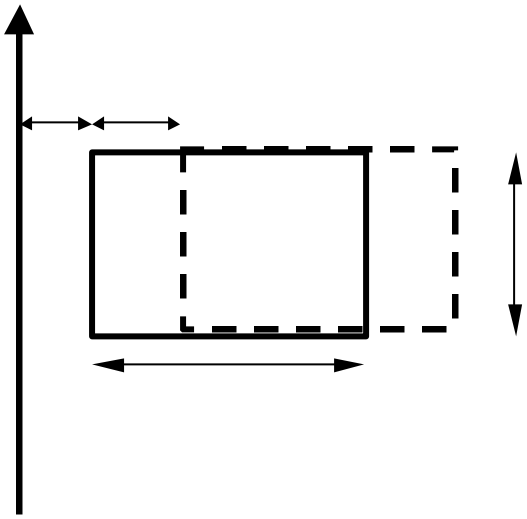
iii) **Ö=f(*b*)** Ocurre lo mismo que en las variables anteriores.

iv) **Ö=f(*a*)** Se trata de buscar la expresión que relaciona Ö con el parámetro *a* de la espira; conociendo la *condición de contorno*: Ö(0)=0, se trata entonces de averiguar cuánto cambia el flujo cuando se produce un cambio de ese parámetro desde a_0 hasta a_0+Äa, situación que se describe en la Figura An3.VII.



El punto de partida más simple será un comportamiento lineal: Ö = $g(\mu_0, I_0, b_0, a_0, D_0)\cdot \Delta a$, aunque si tenemos en cuenta la influencia de *a* en el valor de *B*, cabe esperar que tal comportamiento no será real. No obstante, en lugar de intentar adelantar directamente la función Ö= $f(a)$, seguiremos la estrategia propia del Cálculo diferencial: supondremos un comportamiento lineal imaginario: dÖ=$g\cdot$ da, adelantando, a modo de hipótesis, el parámetro *g* que mejor se ajusta al conocimiento teórico del que disponemos y al que obligaremos a cumplir la condición: Ö'=g.

v) **Ö=f(*D*)** Se trata de buscar la expresión que relaciona Ö con la distancia *D* que separa la espira y el hilo. En este caso, la *condición de contorno* es: Ö(-a/2)=0, pues se trataría de una situación simétrica con el mismo flujo entrante por un lado que saliente por el otro. Debemos averiguar entonces cuánto cambia el flujo cuando se produce un cambio de distancia desde D_0 hasta D_0+ÄD, situación que se describe en la Figura An3.VIII.



El punto de partida más simple será un comportamiento lineal: ÄÖ = $g(\mu_0$, I_0, b_0, a_0, $D_0)\cdot$ ΔD aunque esperamos que ese comportamiento no sea real debido a la influencia de D en el valor de B. De nuevo aquí podemos seguir la estrategia propia del Cálculo diferencial: suponer un comportamiento lineal imaginario: dÖ=$g\cdot$ dD, y adelantar a modo de hipótesis el parámetro g que mejor se ajusta al conocimiento teórico del que disponemos y al que obligaremos a cumplir: Ö'=g.

Aplicando la técnica propia del Cálculo diferencial, la hipótesis diferencial conducirá a un hipotético resultado real. **Conviene así utilizar la variable en cuya expresión diferencial podamos depositar mayor confianza**.

En concreto, la expresión: *d*Ö = $g(\mu_0$, I_0, b_0, a_0, $D_0)\cdot$ da, representa lo que cambiaría el flujo a través de la espira debido a un cambio únicamente del valor del lado a desde a_0 hasta $a_0 + da$, en el caso imaginario en que ese cambio fuese lineal. Podemos utilizar dos ideas ya conocidas: la ley de Biot ($B = \frac{ì\ I}{2ðr}$) y la expresión del flujo magnético cuando el campo magnético es uniforme (Ö=$B\cdot$ A), para adelantar la siguiente expresión lineal y considerarla, a modo de hipótesis, como la diferencial:

$$d\text{Ö} \quad = \quad \frac{\text{ì} \cdot I_0}{2\text{ð} \cdot \left(a_0 + D_0\right)} \cdot b_0 \cdot da$$

Esta expresión refleja lo que ocurriría si el campo magnético mantuviese su valor inicial al aumentar el valor de *a*, y la hemos escrito sin fijar ninguna condición para el valor de d*a* ni para el valor de a_0. Podemos considerar entonces el valor inicial del lado (a_0) como variable (a), y escribir la diferencial como una función de dos variables, lineal respecto a d*a*. Si eliminamos los subíndices de las restantes magnitudes que permanecen constantes durante ese proceso imaginario:

$$d\text{Ö}\left(a\mathbf{,}\, da\right) = \frac{\text{ì} \cdot I}{2\text{ð} \cdot \left(a + D\right)} \cdot b \cdot da$$

Esta hipótesis nos permite realizar una primera estimación para el flujo que atraviesa toda la espira, si suponemos cero la longitud inicial (a=0) y que el aumento del lado coincide con todo el lado de la espira (d*a*=*a*), resultando: $\text{Ö} \approx \dfrac{\text{ì}\ I\, b\, a}{2\,\text{ð}\, D}$ Se trata de una estimación por exceso, pues no hemos tenido en cuenta que en realidad el campo va disminuyendo conforme nos alejamos del hilo conductor.

Para mejorar la estimación, dividimos el lado completo *a* en *N* trozos, y sumamos el aumento de flujo estimado que genera cada trozo: $d\text{Ö}_i = \text{ÄÖ}_i + \text{å}_i$. Este procedimiento puede mejorarse aumentando el número de divisiones, disminuyendo así el error total cometido $\sum \text{å}_i$ Minimizamos el error total calculando el límite al que tiende ese resultado cuando *N* tiende a infinito, es decir, calculando la integral correspondiente:

$$\text{ÄÖ} = \text{Ö}\,\mathbf{(}a\mathbf{)} - \text{Ö}\,\mathbf{(}0\mathbf{)} = \int_0^a \frac{\text{ì} \cdot I}{2\,\text{ð}\left(a + D\right)}\, b\, da + \left(\boldsymbol{error\ \ total\ = \ 0}\right)$$

Al calcular ese límite se anulará el **error total** $\left(\underset{N \to \infty}{lím} \sum_{i=1}^{N} \text{å}_i\right)$, si:

$$\underset{N \to \infty}{lím}\, N \cdot \text{å}_i = 0\ \mathbf{,} \quad \forall\, i$$

Como $\text{å}_i = d\text{Ö}_i - \text{ÄÖ}_i$, y además N y $\text{Ä}a_i$ son inversamente proporcionales, esa condición es equivalente a: $\underset{\text{Ä}a_i \to 0}{lím} \dfrac{d\text{Ö}_i - \text{ÄÖ}_i}{\text{Ä}a_i} = 0$ **,** $\forall i$, es decir: dÖ/da = Ö′, $\forall a$

Esta es la razón por la que, en nuestra hipótesis de partida, hemos impuesto esta condición: $\text{Ö}' = \dfrac{d\text{Ö}}{da} = \dfrac{\text{ì}\ I}{2\,\text{ð}\,(a+D)}\,b$

Aplicando reglas de antiderivación, obtenemos: $\text{Ö}\,\mathbf{(}a\mathbf{)} = \dfrac{\text{ì}\ I\,b}{2\,\text{ð}}\,Ln\,(a+D) + C$

La *condición de contorno*: Ö(0)=0 determina: $C = \dfrac{\text{ì}\ I\,b\,LnD}{2\,\text{ð}}$, y el resultado final será:

$$\text{ÄÖ} = \text{Ö}\,\mathbf{(}a\mathbf{)} = \frac{\text{ì}\ I\,b}{2\,\text{ð}}\,Ln\,\frac{a+D}{D}$$

Aunque la hipótesis contenida en la expresión diferencial de partida no puede contrastarse directamente, ya que se trata de un comportamiento imaginario, el resultado obtenido a partir de ella -e igualmente hipotético- sí es directamente contrastable, ya sea por su coherencia con el marco teórico o por los resultados experimentales. La validez del resultado informará así de la validez de la hipótesis diferencial.

Anexo 4

RELACIÓN DE LIBROS DE TEXTO Y MANUALES UTILIZADOS PARA SU ANÁLISIS

Nivel	Autores	Editorial	Año ed. (año orig.)
1º Bto.	Agustench, M. y otros	S.M.	1996
	Andrés, D.M. y otros	Editex	1995
	De Manuel, E. y otros	Algaida	1996
	Hierrezuelo, J. y otros	Elzevir	1995
	Martín, J. y otros	Santillana	1996
	Morales, J.V. y otros	Edelvives	1997
	Ontañón. G. y Ontañón, E.	Bruño	1997
3º BUP	Aguilar, J. y Garzón, J.L.	Anaya	1980
	Beltrán, J. y otros	Anaya	1985
	Calderón, R. y otros	S.M.	1991
	Candel, A. y otros	Anaya	1991
	Dou, J.M. y otros	Casals	1989
	Escudero, P. y otros	Santillana	1991
	Fidalgo, J.A.	Everest	1990
	Lasheras, A.L. y Carretero	Vicens-Vives	1977
	Lozano, J.J. y Vigatá, J.L.	Alhambra	1985
	Marín, F. y Negro, J.L.	Alhambra	1986
	Martín, J. y otros	Magisterio Español	1976

Nivel	Autores	Editorial	Año ed.	(año orig.)
	Martínez Lorenzo, A.	Bruño	1987	
	Pérez Botella, A.	Marfil	1982	
	Ruiz, A. y otros	Ecir	1988	
COU	Aguilar, J. y otros	Anaya	1980	
	Agulles, J. y otros	Magisterio Español	1978	
	Agustench, M. y otros	S.M.	1992	
	Alsina, J. y otros	Teide	1979	
	Avidad, R.	S.G.E.L.	1978	
	Candel, A. y otros	Anaya	1995	
	Casanova, J. y otros	Santillana	1982	
	De Manuel, E. y Salinas, F.	Edelvives	1991	
	Gamow, G. y Cleveland, J.M.	Aguilar	1969	
	Garzo, F. y Peña, A.	McGraw-Hill	1990	
	González, P. y Llorís, A.	S.M.	1979	
	Guillem, C.	Marfil	1986	
	Hernández, J.L. y otros	MEC (Ibad)	1994	
	Martínez, A. y otros	Bruño	1980	
	Miralles, L. y otros	Ecir	1988	
	Pomer, F. y otros	Ecir	1991	
1º Univ.	Alonso, M. y Finn, E.J.	Fondo Educ. Interameram.	1970	(1967)
	Alonso, M. y Finn, E.J.	Addison-Wesley Iberoam.	1995	(1992)
	Eisberg, R.M. y Lerner, L.S.	McGraw-Hill	1988	(1981)
	Gettys, W.E. y otros	McGraw-Hill	1991	(1989)
	Giancoli, D.C.	Prentice-Hall Hispanoam.	1988	(1984)
	Roller, D.E. y Blum, R.	Reverté	1986	(?)
	Serway, R.A.	McGraw-Hill	1990	(1982)
	Tipler, P.A.	Reverté	1994	

Anexo 5

FRAGMENTOS LITERALES QUE ILUSTRAN LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

5.1. Fragmentos sobre la justificación del uso de la diferencial

CUADRO An5.I. El mejor ejemplo encontrado de justificación del uso de la diferencial, en las primeras ocasiones en que la usa con sentido en sí misma (COU)

Concepto de flujo del vector $\vec{E}$ a través de una superficie

(...) Consideremos en primer lugar el caso sencillo de un campo eléctrico uniforme...

(...) El caso más general de la expresión del flujo corresponde a una situación en la cual la superficie no es plana y/o el campo no es homogéneo; entonces es preciso dividir la superficie considerada en porciones *ds* lo suficientemente pequeñas (infinitesimales) como para poder considerar sobre ellas $\vec{E}$ constante y dS plana. De acuerdo con 8.17 [$\text{Ö} = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \mathbf{cos}\, \text{è}$], el flujo elemental $d\text{Ö}$ a través de esa superficie infinitesimal dS vendrá dado por: $d\text{Ö} = \vec{E} \cdot d\vec{S}$ (...)

CUADRO An5.II. Ejemplo habitual de ausencia de justificación del uso de la diferencial con sentido en sí misma (COU, el mismo libro que el ejemplo anterior)

> **Fuerza sobre un elemento de corriente**
>
> Un conductor que se encuentra en el interior de un campo magnético *B* está recorrido por una corriente de intensidad $i=dq/dt$, esto es, la carga *dq* atraviesa su sección recta en el intervalo de tiempo *dt*. En el transcurso de este tiempo, la carga recorre una longitud $dl=v\cdot dt$, donde *v* es la velocidad con que se desplazan las cargas por el conductor.
>
> La fuerza que el campo magnético ejerce sobre la carga *dq*, según se estableció en la ecuación 12.2 [expresión de la fuerza de Lorentz sobre una carga puntual], vale: $dF=dq\cdot v\cdot B\cdot sen\acute{a}$ (...) que es la fuerza que soporta un elemento de corriente en un campo magnético.

5.2. Fragmentos que identifican cada uno de los tipos de comentario establecidos sobre la justificación de la diferencial en tres tópicos comunes en todos los textos

CUADRO An5.III. Ejemplo de uso de la diferencial con el comentario con significado, aunque erróneo: *"La existencia de una situación no uniforme obliga a tomar cantidades infinitesimales..."* (COU)

> **Energía de un condensador cargado. Energía de un campo eléctrico.**
>
> (...) Consideremos que damos al condensador una carga infinitesimal *dq*, que, al ser muy pequeña, no hace variar sensiblemente el potencial mientras se está

introduciendo. Así, pues, el trabajo que se realiza al introducir *dq* y que queda almacenado en forma de energía será: $dT = V \cdot dq$, donde V es la diferencia de potencial entre las armaduras. (...)

CUADRO An5.IV. Ejemplo de uso de la diferencial con el comentario sin significado: *"Existe una situación no uniforme, sin más comentarios explicativos"* (COU)

Trabajo de una fuerza

Se define el trabajo realizado por una fuerza que se desplaza como el producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento. La expresión matemática que nos lo expresa puede hallarse con carácter general suponiendo que la fuerza es variable y que el desplazamiento de su punto de aplicación no es rectilíneo. Habremos de tomar un desplazamiento infinitamente pequeño y hallar en primer lugar el trabajo elemental correspondiente...

(...) Según la definición dada al principio, el trabajo elemental del que hablamos será: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos á$ (...)

CUADRO An5.V. Ejemplo de uso de la diferencial con el comentario sin significado: *"Simplemente, valores infinitesimales o muy pequeños de las magnitudes"* (1º Univ.)

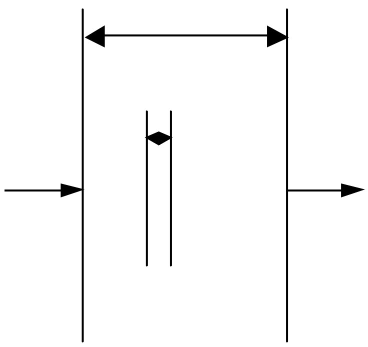
Energía del campo electrostático y tensión

(...) Podemos calcular esta energía evaluando el trabajo requerido para cargar el condensador. Imaginemos que tomamos una pequeña carga $+dq$ de uno de los conductores y la depositamos en el otro. Repetimos este proceso hasta que el condensador se carga hasta una carga final Q, originando una diferencia de potencial V entre los conductores.

Supongamos que en cierta etapa de este proceso de carga, se ha depositado ya una carga $+q$ sobre una de las armaduras, quedando la otra con una carga $-q$, de modo que existe una diferencia de potencial V' entre ambas. En esta etapa, el trabajo dW que se necesita para llevar el siguiente incremento de carga dq de un conductor a otro es: $dW = V'\,dq = dU_e$ (...)

CUADRO An5.VI. Ejemplo de uso de la diferencial con el comentario sin significado: *"Términos o frases hechas sin significado"* (COU)

Absorción



(...) Entre las intensidades I e I_0 existe una relación que vamos a establecer.

La experiencia[3] indica que la disminución de la intensidad depende del espesor atravesado de tal manera que puede establecerse la relación diferencial: -dI = âIdx donde dI es la variación diferencial de intensidad, con el signo menos que indica disminución de intensidad frente a aumentos de x, dx es el elemento diferencial de espesor y â es una constante que depende del medio y de las características de la onda (...)

5.3. Fragmentos en los que se identifica diferencial con cantidad infinitesimal

CUADRO An5.VII. Ejemplos de identificación "extrema" entre diferencial y cantidad infinitesimal (1º Univ.)

> **Trabajo realizado por una fuerza variable**
>
> (...) Supóngase que descomponemos el trayecto curvo (...) en segmentos sucesivamente más pequeños Ä *s*. Cuando Ä*s* se hace infinitesimalmente pequeño:
>
> $\lim_{Äs \to 0} Äs = ds$ (...)
>
> **Aplicaciones de las funciones potenciales**
>
> (...) consideremos una función de punto escalar, diferenciable y continua *cualquiera f(x,y,z).* El cálculo demuestra que -en el caso de variaciones infinitesimales *dx*, *dy* y *dz* de las coordenadas- podemos expresar la variación del valor de *f* como
>
> $$f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (...)$$

Como una muestra más de esta identificación entre diferenciales y cantidades muy pequeñas, y de los errores a los que conduce, puede citarse la resolución de un problema de cinética nuclear que aparece en el *Solucionario* de un texto de COU de uso muy frecuente en nuestro país. Como se sabe, la ley que gobierna la cinética nuclear tiene forma exponencial ($N=N_0\cdot e^{-ë\cdot t}$), y se obtiene partiendo, a modo de hipótesis, de la expresión diferencial: dN=-ë· N· dt. Pues bien, en dicho libro se escribe directamente esta última expresión diferencial en términos de incrementos: ÄN=-ë· N· Ät, confundiendo así diferencial e incremento; y va más allá al realizar cálculos numéricos sustituyendo valores concretos que se dan en el enunciado, concluyendo entonces que para Ät=4 s se cumple: ÄN=-1.66 N_0 La solución que se obtiene es, evidentemente, errónea, pues si la forma de $N(t)$ es exponencial, la forma de ÄN no puede ser lineal.

5.4. Fragmentos sobre el uso de la derivada como cociente diferencial

CUADRO An5.VIII. Ejemplo de uso habitual de la derivada como cociente diferencial (3° BUP)

> Se puede relacionar el impulso mecánico y la cantidad de movimiento a partir de la nueva expresión de la segunda ley de Newton: $F = \frac{dP}{dt}$ Pasando dt al primer miembro: $F \cdot dt = dP$ y sustituyendo dP por su expresión: $dP = m \cdot dv$ se tiene (...)

CUADRO An5.IX. Ejemplo de uso habitual de la derivada como cociente diferencial (COU)

$$W = \int_A^B F_t \cdot ds = \int_A^B m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = m \cdot \int_A^B \frac{ds}{dt} \cdot dv = m \cdot \int_A^B v \cdot dv \quad (\ldots)$$

5.5. Fragmento sobre la concepción de la integral, y su relación con la diferencial

CUADRO An5.X. Ejemplo de definición de la integral como *sumas de Riemann* y *demostración* habitual de que la integral de una diferencial conduce al incremento (COU)

(...) Recibe el nombre de *trabajo elemental* realizado por la fuerza **F** el producto escalar: $dW = \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ siendo $d\mathbf{r}$ el desplazamiento que efectúa la partícula a lo largo de su trayectoria en un tiempo muy corto, dt.

(...) Si la partícula se desplaza desde un punto A hasta otro B y, como corresponde al caso más general, la fuerza es variable, podemos descomponer la trayectoria finita en pequeños elementos $d\mathbf{r}_1$, $d\mathbf{r}_2$, $d\mathbf{r}_3$ ..., en los cuales se puede suponer que la fuerza **F** no varía. El trabajo finito que realiza la fuerza desde A hasta B vendrá dado por: $W = \sum dW = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$

que se expresa en el límite por: $W = \int_A^B \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r}$

Para integrar la ecuación anterior necesitamos conocer la forma en que varía la fuerza (...)

Anexo 6

CURSO PARA PROFESORES: El uso del concepto de diferencial y del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física

(Un análisis crítico y una propuesta fundamentada)

El curso, de unas 20 horas de duración, persigue los siguientes **objetivos**:

- Reconocer las deficiencias en el uso habitual del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física

- Presentar la concepción de la diferencial de Fréchet y aplicarla en distintos contextos

- Clarificar la relación entre los conceptos básicos del Cálculo diferencial

- Analizar críticamente, a la luz de las nuevas ideas, el uso del calculo en la enseñanza de la Física y diseñar propuestas alternativas

Su **contenido** se estructura en tres apartados, cada uno de los cuales consta de varias actividades que realizan los asistentes:

1. **Planteamiento del problema.** La intención de este apartado es *problematizar* y dar sentido al resto del curso, haciendo que los asistentes

lleguen a reconocer y explicitar sus propias dudas y dificultades para usar el Cálculo diferencial, y que identifiquen estas deficiencias como efecto, y ahora causa, de una enseñanza sin comprensión.

2. **La diferencial de Fréchet.** Se presenta la nueva concepción de la diferencial como estimación lineal y, para asegurar que la han comprendido y aprecian su potencialidad, los asistentes comprueban su utilidad para justificar y explicar el significado de expresiones diferenciales comunes en la Física. Además, los asistentes analizan la forma en que habitualmente se introducen las expresiones diferenciales y comprueban también la potencialidad de la nueva propuesta.

3. **¿Para qué sirve la diferencial?, ¿qué comportamiento global se deduce de ese comportamiento local?** Después de realizar cálculo numérico para obtener mejores aproximaciones, se introduce el concepto de integral de Riemann y se comprueba la facilidad con que el nuevo concepto de diferencial permite justificar el teorema fundamental. Los asistentes analizan críticamente la forma en que habitualmente se pasa de la expresión diferencial al resultado final y comprueban la potencialidad de la nueva propuesta.

La **metodología** para desarrollar el programa coincide con la utilizada con nuestros alumnos: los asistentes se organizan en pequeños grupos y tratan de realizar, con la ayuda puntual del profesor, las actividades que aparecen en el programa-guía de manera secuenciada. Antes de realizar cada actividad, el profesor aclara en caso de duda lo que se pretende con ella, y después del trabajo en grupo se hace una puesta en común y se establece una discusión, siendo el profesor el encargado de hacer las aclaraciones pertinentes, ampliar y sintetizar las conclusiones.

A continuación se presenta el programa de actividades, incluyendo comentarios aclaratorios en cada actividad para explicar su intención o la información adicional que añade el profesor durante la puesta en común.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A1. *Contesta a las cuestiones que te entregan, y anota las dificultades y comentarios relacionados con el Cálculo diferencial que consideres oportunos. Cuando acabes, discute con tus compañeros las anotaciones realizadas.*

Comentario A1:

Se pretende reconocer la existencia de un problema mediante la toma de conciencia de los asistentes de sus propias dudas y las de sus compañeros. Durante la puesta en común aparecen interrogantes relacionados con el significado de las expresiones diferenciales, su valor numérico, la relación entre derivada y diferencial... Para salir al paso de una posible reacción inmediata ante el problema: prescindir de las matemáticas, se propone la siguiente actividad.

A2. *Discute con tus compañeros el grado de acuerdo con la siguiente afirmación:*

Con frecuencia, el uso de las matemáticas en las clases de física enmascara el significado físico de las ideas que se utilizan, y además generan rechazo entre muchos alumnos. En particular, la complejidad del Cálculo diferencial, lo convierte en la práctica en un mero instrumento que se usa de forma rutinaria.

Por todo ello, una propuesta de aprendizaje significativo de la física en niveles no universitarios debería prescindir del uso de las matemáticas, o al menos reducir ese uso a casos muy sencillos y excepcionales.

Comentario A2:

Los asistentes coinciden en rechazar el abandono de las matemáticas. Se les hacer ver que esa opinión es compartida por la mayoría de los profesores encuestados, y se les enumeran los tópicos de Física en Bachillerato que requieren el uso del Cálculo diferencial. Para que comprendan mejor la magnitud del problema, se les presenta el resto de **opiniones** de profesores y estudiantes: su percepción es que el Cálculo diferencial se usa de forma algorítmica y sin expectativas de comprensión en las clases de Física, provocando actitudes negativas: rechazo, inseguridad...

A3. *El Cálculo diferencial debería ser una ayuda para facilitar y potenciar la comprensión física. Sin embargo, existe una opinión ampliamente compartida que considera al Cálculo diferencial como una dificultad añadida para la comprensión física ¿A qué crees que es debido?*

Comentario A3:

Se citan causas comunes a otras deficiencias más generales de la enseñanza de la Física en Bachillerato: la amplitud de los programas, el carácter puntual y algorítmico de las pruebas de acceso y de la enseñanza universitaria que van a recibir sus alumnos, la falta de coordinación con otras asignaturas... Pero se cita como causa principal la falta de conocimientos de los profesores y la forma superficial y algorítmica con la que han sido enseñados, identificando el cálculo con el dominio de reglas.

Se presentan los resultados obtenidos –ilustrados con ejemplos concretos- sobre la falta de justificación y significado de la diferencial cuando profesores y estudiantes resuelven problemas de física. Se presentan también los resultados de Nagy *et al*. (1991) que muestran este uso algorítmico también en las clases de matemáticas.

A modo de resumen, sin aportar datos concretos en este momento, se resumen las principales carencias: ni se enseña ni se sabe cuándo y por qué se usa la diferencial, cuál es el significado específico de términos y expresiones diferenciales, si es legítimo considerar a la derivada como cociente diferencial, por qué las *sumas infinitas* se calculan mediante reglas inversas a las del cálculo de derivadas...

A4. *Elabora un índice de las cuestiones que será necesario estudiar para superar la situación planteada.*

Comentario A4:

Después de las actividades realizadas, los asistentes formulan una serie de interrogantes que será necesario aclarar: ¿qué es la diferencial?, ¿cuándo se usa?, ¿qué relación guarda con la derivada y la integral? A todos ellos, se añade: ¿es posible utilizar con verdadera rentabilidad didáctica un tratamiento alternativo?

A lo largo de la historia del Cálculo, desde su creación definitiva en el siglo XVII, el papel asignado a la diferencial y su propio significado han sido objeto de controversia y evolución. Es conveniente detenernos en analizar dos momentos clave en el desarrollo histórico del Cálculo diferencial, para poder identificar con mayor claridad las concepciones hoy dominantes en la enseñanza de la Física. Conscientes de la simplificación que ello supone, resumiremos dos concepciones distintas: la diferencial de Leibniz y la diferencial de Cauchy.

Comentario:

Se hace una breve descripción de la concepción de Leibniz y la de Cauchy, con sus ventajas e inconvenientes, resaltando las coincidencias con las respuestas y actitudes de los profesores. Se advierte que cada individuo recurre a una u otra concepción en función del contexto. Después de esa descripción, se adelanta la intención de presentar **una nueva concepción de la diferencial** que recupere la idea de aproximación, el estrecho contacto con los problemas físicos, y el status principal que Leibniz le asignaba y, sin embargo, conserve la falta de ambigüedad y el rigor que Cauchy pretendía imponer.

2. LA DIFERENCIAL DE FRÉCHET

Las actividades realizadas hasta aquí nos han permitido reconocer la concepción habitual de la diferencial que -semejante a la concepción original de Leibniz- identifica la diferencial con las cantidades muy pequeñas. A veces se manifiesta también una concepción de la diferencial -semejante a la de Cauchy- según la cual la diferencial es un simple instrumento formal desprovisto de significado específico.

Hemos adelantado también cómo esta concepción dominante conduce a una falta de justificación del uso del Cálculo diferencial y a un uso mecánico del mismo, aprendido por repetición, sin un significado preciso de las expresiones utilizadas.

Estamos en condiciones entonces de admitir la posibilidad -si no la necesidad- de buscar una *nueva* concepción que supere estas deficiencias y dote de un significado claro y preciso a la diferencial conforme al importante papel que juega en la Física. El profesor presentará esta *nueva* concepción y sugerirá la realización de cada actividad en el momento oportuno.

Comentario:

Se introduce la diferencial de Fréchet de acuerdo con el siguiente esquema: reconocer el problema físico general que se trata de resolver (¿cuánto cambia la magnitud f cuando se produce un cambio de la magnitud x?); argumentos claros por los que df no es Äf por muy pequeño que sea Äx, tampoco es el límite al que tiende Äf cuando Äx tiende a cero; reflexión sobre el motivo por el que se exige siempre que sea tan pequeña: idea de estimación; concepción de la diferencial como estimación lineal respecto al Äx. No se llega aún a plantear la existencia de muchas estimaciones lineales posibles...

Comentario A5-A8:

En las cuatro siguientes actividades se utiliza la diferencial de Fréchet para interpretar y justificar expresiones diferenciales conocidas. Se presentan al mismo tiempo algunos resultados que muestran la incapacidad de profesores, estudiantes y libros de texto para justificar y explicar esas mismas expresiones. Se aplaza para más tarde la discusión sobre la utilidad de realizar estimaciones.

En cuanto al cálculo numérico, se destaca el valor macroscópico como medio de apreciar mejor en qué consiste la estimación, y se relativiza el término “muy pequeño” (por ejemplo: 96 m/s = 0.096 km/s = 10^{-14} años-luz/s). Se destaca también la necesidad de precisar: “*la diferencial a partir de ... para un intervalo de* ...”, pues es más fácil así reconocer después el carácter funcional.

A5. *Si v es la velocidad de un cuerpo, ¿qué diferencia existe entre* Ä*v y* d*v? Si la aceleración en el instante t=3 s es de 8m/s*^{2}*, ¿cuál de las dos expresiones:* Ä*v=a·* Ä*t* --- d*v=a·* d*t utilizarías para estudiar la variación de velocidad, a partir de ese instante, durante un intervalo de tiempo? Calcula dv, a partir de t=3 s para un intervalo de 12 s, y explica el significado físico del resultado que obtengas.*

A6. *Cuando se estudia la presión hidrostática en el interior de un fluido, a veces se usa la siguiente expresión:* d*P=*ñ*· g·* d*h Explica en qué casos será necesario usarla, y cuál será su significado. Realiza algún cálculo numérico de* d*P sabiendo que en un punto a 300 m de profundidad la densidad del fluido es de 1.14 kg/m*^{3} *y el valor de g es de 9.6 N/kg*

A7. *La diferencial de la masa, a partir de h=14 m para un intervalo de altura de 20 m, es de 60 g. Explica el significado físico de ese dato, e interpreta el significado físico del cociente: diferencial de masa entre el intervalo de altura.*

Comentario A7:

Después de haber interpretado el significado de distintos valores numéricos de la diferencial, el cociente diferencial se interpreta: *lo que cambiaría la masa* ***por cada metro de altura****, a partir de h=14 m, si el aumento fuese uniforme*. Puede repetirse esta operación para las expresiones de las dos actividades anteriores. No se trata de identificar aún ese cociente con la derivada, sino de darle un significado preciso.

A8. *La expresión matemática inicial de la ley de las desintegraciones radiactivas es la siguiente:* d*N=-*ë*· N·* d*t Explica por qué se escribe en forma diferencial, y el significado* *físico de esa expresión. Si, a partir de un instante determinado, para un cierto intervalo de tiempo, el* |ÄN| *medido experimentalmente ha sido de 1400 núcleos, ¿cuál crees que habría sido el valor del* |dN| *correspondiente: mayor, menor o igual que 1400?*

Comentario A8:

La discusión sobre el valor numérico y su relación con Ä*N* contribuye a profundizar sobre el significado de la expresión diferencial, destacando su carácter hipotético frente a la medida experimental del Ä*N*.

A9. *Dada una magnitud física cualquiera: M, ¿de qué variables dependerá la función diferencial (*d*M)?. ¿Qué relación de orden (mayor, menor o igual) existirá entre* d*M y* Ä*M?*

Comentario A9:

Con carácter más general que en las actividades anteriores, se reconoce el carácter funcional de la diferencial. La relación entre diferencial e incremento se aprecia mejor si se toman cambios “macroscópicos” de variable, en lugar de cambios “microscópicos” en los que todo *parece* confundirse. Puede hacerse una precisión adicional: la necesidad de especificar: “*diferencial respecto a*...”, algo que queda implícito en la mayoría de las ocasiones.

A10. *Cuando se estudia la absorción de intensidad de una onda plana por un medio material, se requiere escribir una expresión diferencial que relacione la variación de intensidad (I) con la variación de la posición (x). Señala aquéllas expresiones que consideres posibles, y tacha las que consideres imposibles:*

$\mathrm{d}I=-â\cdot I^2\cdot \mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}I=-â\cdot I.(\mathrm{d}x)^2$ $\qquad$ $\mathrm{d}I=-â\cdot \ln I.\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}I=-â\cdot I\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}I=-â\cdot \mathrm{d}x$ $\qquad$ $\mathrm{d}I=-I\cdot e^{-â\cdot \mathrm{d}x}$

Comentario A10:

Primer requisito: la expresión diferencial debe ser lineal respecto al cambio de variable. Pero existen muchas expresiones compatibles con este requisito, cuyo significado es distinto, aunque si se toman valores *microscópicos* no se aprecian tales diferencias. Cada expresión corresponde a una hipótesis no arbitraria sino apoyada en argumentos físicos. Es necesario establecer un criterio que permita seleccionar la expresión diferencial entre las muchas posibles. Dicho criterio estará guiado, lógicamente, por la validez del comportamiento real al que conduzca.

Debe advertirse que, en casos especiales, cuando el comportamiento uniforme es realmente posible, la expresión diferencial convertida en incrementos debe ser válida para esa situación uniforme (se revisarán: A5, A6 y A7). En las dos siguientes actividades se volverán a repetir situaciones de este tipo.

Tenemos ya elementos suficientes para poder realizar un análisis crítico del uso de expresiones diferenciales en las clases de física, y proponer formulaciones alternativas. En las dos siguientes actividades revisaremos dos fragmentos de libros de texto sobre distintos tópicos de física.

A11. Lee el siguiente fragmento extraído de un libro de texto:

Energía almacenada en un condensador

Sea un condensador descargado cuyas placas se conectan a una batería. Cuando esto ocurre, el condensador se carga, esto es, aparecen en las placas cargas eléctricas de signos contrarios, y como consecuencia surge entre dichas placas una diferencia de potencial, V. La energía necesaria para que aparezca una carga dq entre las placas será: $\mathrm{d}E=V\cdot\,\mathrm{d}q$

Realiza una crítica de ese texto, y formula una alternativa para llegar a la expresión diferencial.

Comentario A11:

Se reconoce la ausencia de justificación y significado de la expresión diferencial; implícitamente, se identifica diferencial e incremento. Esta crítica no es particular del texto elegido: se presentan resultados del análisis de este tópico en distintos textos.

En la formulación alternativa, se formula con mayor precisión la pregunta: ¿cuánto Ä*E* para un Ä*Q*?, y se resaltan algunas características: i) agotar el cálculo ordinario y reconocer la causa que obliga a abandonarlo, ii) explicar el significado de la expresión, recurriendo a valores numéricos si es necesario iii) cuando se comprende lo que se hace, el lenguaje matemático ayuda y acompaña al análisis físico. Se llama la atención sobre el siguiente hecho: en este caso, la expresión diferencial no es una hipótesis.

A12. Lee el siguiente fragmento extraído de un libro de texto:

Absorción de la onda por el medio

(...) Experimentalmente se comprueba que, para una onda plana, al atravesar un medio de espesor dx, *se produce una variación* dI *en su intensidad.*

Esa variación es directamente proporcional a la intensidad de la onda y a la distancia, dependiendo de las características del medio; dichas características se engloban en una constante â, *denominada coeficiente de absorción del medio.*

Matemáticamente, podemos escribir: dI=-I· â· dx *donde el signo negativo representa que la intensidad disminuye a medida que aumenta el espesor a atravesar.*

Realiza una crítica de ese texto, y formula una alternativa para llegar a la expresión diferencial.

Comentario A12:

La misma crítica que en el texto anterior, y las mismas características para la propuesta alternativa. En este caso, la pregunta precisa es: si en x la intensidad es I, ¿cuál es el ÄI para un Äx? La expresión diferencial no se obtiene en esta ocasión a partir del caso particular de comportamiento uniforme, sino que es una hipótesis basada en el análisis físico del fenómeno; recordar entonces que será preciso establecer un criterio para seleccionar la estimación lineal, entre las muchas hipótesis posibles, que corresponde a la diferencial.

A13. *En un horno previamente encendido se ha introducido una pieza hasta que alcanza una temperatura bastante alta; en ese instante se saca la pieza del horno. Cuando la pieza lleve un intervalo* Ä*t fuera del horno, ¿en cuánto habrá cambiado la temperatura (*ÄT*) de la pieza?*

Comentario A13:

El trabajo se corta cuando llegan a escribir la expresión diferencial, cuestionando las rutinas que suelen darse a partir de ahí. Cada grupo habrá escrito una expresión diferencial según el análisis físico realizado, válida siempre que sea lineal respecto al Ät. En la discusión para establecer cuál es las expresión correcta se destacan dos ideas: el lenguaje y discusión matemática se apoya siempre en el análisis fsico, la expresión diferencial será siempre una hipótesis cuya validez vendrá determinada por la validez del resultado global al que conduzca.

A14. *Inicia el planteamiento del siguiente problema, tal como lo resolverías con "novatos" en el uso del Cálculo diferencial, hasta llegar a la expresión diferencial correspondiente:*

> ***Un filamento muy delgado y recto se encuentra cargado uniformemente con una densidad lineal de carga: ë. Calcula la intensidad y el potencial del campo eléctrico en un punto situado sobre el mismo eje del filamento, a una distancia D de un extremo del mismo.***

Comentario A14:

Como en la actividad anterior, el trabajo se corta cuando se llega a escribir una expresión diferencial. Al no aparecer en el enunciado la variable independiente, la primera discusión se establece en torno a cuál es la variable que se debe seleccionar. Se identifican las variables posibles y el significado de la expresión diferencial en cada caso; aunque cualquier variable puede conducir al resultado final, se elige aquella cuya expresión diferencial tenga un apoyo más sólido; en este caso: Ä*E* frente a Ä*x*. Una vez seleccionada la variable, existen distintas expresiones según el sistema de referencia elegido, pero ahora no se trata de una hipótesis pues es conocida la expresión del campo creado por un cuerpo puntual, que es la situación a la que se refiere la expresión diferencial. Al final, se hace ver que la expresión diferencial no es nada evidente, algo que suele darse por supuesto en la enseñanza habitual, sino que es una tentativa que expresa una buena carga de análisis y discusión de contenido físico.

Es el momento de establecer un criterio que nos permita decidir, entre todas las estimaciones lineales posibles, cuál es la función diferencial. Este criterio es el que la convierte en la **estimación lineal tangente**.

Comentario:

Se presenta ahora la definición completa de Fréchet, en la que se fija la condición que debe cumplir la diferencial: que su diferencia con el incremento sea un infinitamente pequeño respecto al cambio de variable, insistiendo en que esto no significa que la diferencial sea un infinitamente pequeño. Se revisa en qué consiste esta condición cuando se aplica a distintas expresiones diferenciales usadas antes.

Es fácil que los asistentes reconozcan esa condición con la identificación de la derivada con el cociente diferencial, y si no es así se explica brevemente; se comenta entonces la posible definición de derivada a partir de la diferencial: **la función derivada $f'(x)$ es el caso particular de la función diferencial $df(x,dx)$ en que dx=1**. Los asistentes, animados a cuestionar lo que les parecía evidente, se animan ahora a preguntar por qué precisamente se establece esa condición; además de valorar ese carácter crítico que ahora adoptan, la justificación debe quedar como un problema pendiente para la tercera parte del curso.

A15. *Si la velocidad puede expresarse como un cociente de diferenciales, ¿cuál crees que es el significado del siguiente dato obtenido para el movimiento de un cuerpo: "la velocidad instantánea en t=3 es de 8 m/s"?*

> **Comentario A15:**
> Se trata de utilizar la concepción de la diferencial de Fréchet, y la identificación entre derivada y cociente diferencial, para definir con precisión magnitudes físicas como la velocidad instantánea. Diferenciar entre definición y forma de cálculo, algo que se confunde en la enseñanza habitual. Resaltar que la velocidad no es ninguna velocidad media, sino que es un concepto diferente.

Por tanto, la diferencial -con la nueva concepción- es mucho más que un simple instrumento formal definido mediante la fórmula de Cauchy ($df=f'\cdot dx$), y mucho más que una magnitud de significado físico ambiguo al estilo de la diferencial de Leibniz. Se convierte en un instrumento que encierra una idea física fundamental: la necesidad de adelantar expresiones -a modo de hipótesis- que simplifiquen comportamientos inicialmente complejos. Dicha hipótesis estará fundamentada la mayoría de las veces en un análisis físico de cada situación -de acuerdo con un marco teórico-, y en último término su validez vendrá confirmada por la veracidad de los resultados que se obtengan a partir de esa hipótesis.

Pero, ¿qué resultados? Si la diferencial no es mas que una estimación lineal, una situación idealizada, ¿cómo podemos obtener a partir de ella cuál será el comportamiento global? Es decir, si adelantamos una expresión determinada para d*M*, ¿cuál es el Ä*M* que se deriva de esa estimación?

3. ¿PARA QUÉ SIRVE LA DIFERENCIAL?, ¿QUÉ COMPORTAMIENTO GLOBAL SE DERIVA DE ESE COMPORTAMIENTO LOCAL?

A16. *Después de un análisis físico sobre la dependencia de una magnitud M con otra magnitud x, se obtiene la siguiente expresión diferencial:* $\mathbf{d}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{(3x^2+7)\cdot}\ \mathbf{d}\boldsymbol{x}$ *Justifica* *con tus propias palabras la necesidad de recurrir a la diferencial, y explica el significado de esa expresión.*

A17. *Calcula* d*M cuando x cambia desde 2 hasta 5. El* Ä*M que corresponde a ese intervalo, ¿será mayor, menor o igual que el resultado numérico que has obtenido? Intenta mejorar más aún tu estimación del* Ä*M correspondiente a ese intervalo.*

Comentarios A16 y A17:

En la **A16** simplemente se trataba de recordar la justificación y el significado de la diferencial. En la **A17** calculan directamente d*M*, y mejoran la aproximación siempre dividiendo el Ä*x* en tres subintervalos. Algunos pasan a escribir la integral, pero reconocen que han aplicado rutinas y no saben si es válido lo que están haciendo. En algunos pocos casos –pocos- escriben el cociente diferencial y lo identifican con la derivada, aplicando a partir de ahí técnicas de antiderivación. Aunque este procedimiento es correcto, y se sugiere que puede ser adecuado para 3º BUP o 1º Bachillerato, se les anima a seguir por el procedimiento de mejora de la estimación haciendo cálculo numérico.

Después de obtener distintos valores numéricos, se reconoce la existencia de un método de aproximación que puede mejorarse aplicando siempre el mismo esquema; aunque cada vez es mayor el número de sumandos el valor de cada sumando es más pequeño, consiguiendo así disminuir el error. Se formula entonces la pregunta clave: **¿es posible llegar mediante este procedimiento al Ä*M* exacto, es decir, anular el error?** Es evidente que la respuesta es negativa, pero la introducción del concepto de límite permitirá construir un concepto diferente a la de cualquiera de las aproximaciones y llegar al resultado exacto. En la siguiente actividad se discute otra vez esta cuestión pero aplicada a un caso concreto.

A18. *Suponiendo conocida la velocidad de un cuerpo en cada instante: v(t), indica mediante el método de estimaciones sucesivas cómo podríamos calcular cuánto se ha desplazado (*Ä*x) durante un* Ä*t. ¿Podremos, mediante este método, llegar a conocer el valor exacto del* Ä*x?*

Comentario A18:

Todos los grupos llegan a escribir el método de obtención de aproximaciones mediante el símbolo sumatorio; la mejora de la estimación se reduce a aumentar el número de subintervalos en que se divide el Ä*t*. De forma automática plantean después el paso al límite y la construcción de la integral.

En la puesta en común, se identifica el error cometido en cada sumando (Ä*x*-d*x*), y se cuestiona que el error total necesariamente tenga que ser cero en el límite cuando *N* tiende a infinito. Una vez que los asistentes son conscientes de esta cuestión, se muestra cómo la exigencia de que el límite del error total sea cero equivale a exigir que la diferencial cumpla la condición de Fréchet. Queda así justificado por qué la diferencial tenía que cumplir precisamente esa condición impuesta por Fréchet. La siguiente actividad pretende reforzar lo que se ha avanzado en hasta aquí, pero en el caso general y no referido a la distancia y la velocidad.

A19. *Dada la siguiente expresión:* $\int_a^b T(x) \cdot dx$ *¿qué es lo que pretendíamos calcular?, ¿por qué no lo hemos podido hacer mediante el cálculo ordinario?, ¿cuál es el significado del "integrando"? Explica cómo puedes resolver esa integral (es decir, justifica el* ***Teorema Fundamental del Cálculo****)*

Comentario A19:

Usando el concepto de diferencial de Fréchet se repasa la justificación del uso del Cálculo diferencial, la mejora de estimaciones, el significado de la integral... y se justifica de forma sencilla el Teorema Fundamental.

Se comentan los resultados obtenidos con libros de texto, profesores y estudiantes sobre la relación entre la diferencial y derivada, o sobre el Teorema Fundamental, en contraste con la claridad que proporciona la propuesta alternativa diferencial, recordando además en unas pocas horas se ha tratado de dar sentido a lo que no se ha conseguido alcanzar durante muchos años como estudiantes y profesores.

En las actividades siguientes se trata de utilizar la propuesta alternativa para resolver problemas o hacer desarrollos que exigen el uso del Cálculo diferencial. Se les pide en este momento que antes de la siguiente sesión nos envíen por escrito algunos problemas o desarrollos que usan el Cálculo diferencial y que hasta ahora les había costado entender.

A20. *Después de haber obtenido la expresión diferencial correspondiente en la* **A14***, haz un desarrollo para "novatos" en el uso del Cálculo diferencial que nos permita averiguar el campo eléctrico creado por el filamento uniformemente cargado.*

Comentario A20:

Partiendo de la expresión diferencial que ya se había discutido, es conveniente que se realicen estimaciones dividiendo el filamento en varios trozos. Construir después la integral y relacionar su resolución con la condición de Fréchet, es decir, con el cálculo de antiderivadas. Analizar la validez del resultado como medio de asegurar la expresión diferencial que se había escrito.

A21. *Después de haber obtenido la expresión diferencial correspondiente en la* **A13***, haz un desarrollo para "novatos" en el uso del Cálculo diferencial que nos permita averiguar la temperatura de la pieza en cualquier instante.*

Comentario A21:

Se repite el mismo esquema que en la actividad anterior. En este caso, el cálculo de la antiderivada no es inmediato, y es preciso utilizar técnicas y algoritmos. De nuevo, analizar la validez del resultado como medio de validar la expresión diferencial de partida.

A22. *Lee el siguiente fragmento extraído de un libro de texto. Se trata de una de las primeras ocasiones en que usa el Cálculo diferencial:*

Expresión general del trabajo

Consideremos un punto material que se mueve a lo largo de una determinada trayectoria bajo la acción de una fuerza. Definimos el trabajo elemental realizado por la fuerza F *en un desplazamiento infinitesimal dr, como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento de su punto de aplicación.*

Así pues: $\mathrm{d}W = F \cdot \mathrm{d}r = F \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos\theta$

Cuando el punto se mueve desde r_1 *hasta* r_2 *el trabajo se obtiene integrando a lo largo de la trayectoria:* $W = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr$

Realiza una crítica de ese texto, y formula una alternativa para llegar a la expresión final.

Comentario A22:

Se hace una revisión completa: falta de justificación, de significado, de estimaciones sucesivas, de construcción de la integral... Se plantea una formulación alternativa haciendo uso de la concepción de Fréchet que supere las críticas formuladas, y se resumen las características que debería tener una forma alternativa de usar el Cálculo diferencial en las clases de Física.

A23. *Calcula el flujo magnético a través de una espira rectangular que se encuentra cerca de un hilo conductor muy largo por el que pasa una cierta intensidad de corriente, de forma que el hilo es paralelo a uno de los lados de la espira.*

Comentario A23:

Al final del curso, se proponen algunos de los problemas y desarrollos que nos han enviado los asistentes; esta actividad es un ejemplo de esos envíos. Conviene valorar la utilidad y potencia del aprendizaje realizado, y resaltar en todo momento la discusión física que acompaña a la discusión matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGHADIUNO, M.C.K. (1992). Mathematics: history, philosophy and applications to science. *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology,* 23 (5), pp. 683-690. [10, 31, 45, 91, 97, 98]

AGUILAR, R., CARMONA, A., GALERA, A., LÓPEZ-GAY, R. y MARTÍN, J.A. (1993). *El planteamiento de problemas como punto de partida para la enseñanza de la física: cinemática*. Póster presentado en el IV Congreso de la Revista de Enseñanza de las Ciencias. Barcelona, 1993. [255]

ALEKSANDROV, A.D., KOLMOGOROV, A.N., LAURENTIEV, M.A. y otros, (1956). *La matemática: su contenido, métodos y significado. Vol 1.* Madrid: Alianza Universidad, 1973. [28, 29, 41]

ALIBERT, D., ARTIGUE, M., COURDILLE, J.M., GRENIER, D., HALLEZ, M., LEGRAND, M., LEGRAND, M., MENIGAUX, J., RICHARD, F. y VIENNOT, L. (1987). Le thème “Differentielles” un exemple de coopération maths-physique dans la recherche. *Actes du Colloque du GRECO Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques,* Sêvres. Grenoble: Ed. La Pensée Sauvage, pp. 7-45. [11, 32, 46, 95, 100, 227, 228]

ALIBERT, D. y LEGRAND, M. (1989). Procedures differentielles et integrales aun niveau du premier cycle universitaire – une mise au point. En: *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe VII)*. Université Paris 7: IREM et LDPES. [78, 228]

ALONSO, M. (1994). *La evaluación en la enseñanza de la Física como instrumento de aprendizaje*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. [239]

ALONSO, M., GIL, D. y MTNEZ. TORREGROSA, J. (1992 *a*). Concepciones espontáneas de los profesores de ciencias sobre la evaluación: obstáculos a superar y propuestas de replanteamiento. *Revista de Enseñanza de la Física,* 5 (2), pp. 18-38. [94, 239]

ALONSO, M., GIL, D. y MTNEZ. TORREGROSA, J. (1992 *b*). Los exámenes de Física en la enseñanza por transmisión y en la enseñanza por investigación. *Enseñanza de las Ciencias,* 10 (2), pp. 127-138. [94, 239]

ALONSO, M., GIL, D. y MARTÍNEZ TORREGROSA, J. (1996). Evaluar no es calificar. La evaluación y la calificación en una enseñanza constructivista de las ciencias. *Investigación en la Escuela*, 30, pp. 15-26. [239]

APOSTOL, T.M. (1961). *Calculus. Vol 1.* Barcelona: Reverté, 1965. [28]

ARTIGUE, M. (1986). The notion of differential for undergraduate Students in Science. *Proceedings of the Xth Annual conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education,* Londres, pp. 229-234. [32, 45, 99, 100, 228]

ARTIGUE, M. (1989). Le passage de la différentielle totale à la notion d'application linéaire tangente. En: *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe I)*. Université Paris 7: IREM et LDPES. [32, 44, 46, 228]

ARTIGUE, M. y VIENNOT, L. (1987). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. *Poceedings of the Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Sciences and Mathematics (vol. III).* Cornell, Ithaca, USA: Ed. Cornell University. [45, 47, 60, 70, 90, 91, 95, 99, 228, 241, 402]

ASPINWALL, L., KENNETH, S. y PRESMEG, N. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (3), pp. 301-317. [95, 241]

AUSUBEL, D.P. (1978). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas (2ª ed., 4ª reimp., 1990). [298]

AZCÁRATE, C. (1990)*. La velocidad: introducción al concepto de derivada.* Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona. Reseña en: *Enseñanza de las Ciencias*, 9(2), pp. 201-202. [11, 95, 228]

BARTLE, R. (1996). Return to the Riemann Integral. *The American Mathematical Monthly*, 103 (8), pp. 625-632. [11, 67, 195, 228]

BENCZE, L. y HODSON, D. (1999). Changing Practice by Cahnging Practice: Toward More Authentic Science and Science Curriculum Development. *Journal of Research in Science Teaching*, 36 (5), pp. 521-539. [232]

BISQUERT, J., MAFÉ, S. y ARRIBAS, E. (1990). Un ejemplo para la introducción del cálculo diferencial en física. *Revista Española de Física,* 4, 2, pp. 53-57. [91]

BOURBAKI, N. (1969). *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad, 1972. [29, 38]

BREITENBERGER, E. (1992). The mathematical knowledge of physics graduates: Primary data and conclusions. *American Journal of Physics*, 60 (4), pp. 318-323. [91, 95]

BULLEJOS, J. (1983). Análisis de actividades en textos de Física y Química de 2º de BUP. *Enseñanza de las Ciencias*, 6 (1), pp. 19-29. [110]

BURBULES, N. y LINN, M. (1991). Science education and philosophy of science: congruence or contradiction? *International Journal of Science Education*, 13 (3), pp. 227-241. [232, 239]

BURN, R.P. (1993). Individual development and historical development: a study of calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 24 (3), pp. 429-433. [12, 98]

BUZZO, R. (1992). Aproximación a la Física a través de métodos numéricos y simulación computacional. *Caderno Catarinense de Ensino de Fisica, Florianópolis,* 9 (2), pp. 143-146. [228, 241]

CAJARAVILLE, J.A. (1991). Algoritmos y aprendizaje. *Apuntes de Educación (Naturaleza y Matemáticas),* 41, pp. 2-4. [93, 241]

CALATAYUD, M.L. *et al.* (1980 *a*). *Trabajos prácticos de física.* ICE. Universidad de Valencia. [239]

CALATAYUD, M.L. *et al.* (1980 *b*). *Trabajos prácticos de química como pequeñas investigaciones*. ICE. Universidad de Valencia. [239]

CALATAYUD, M.L. *et al.* (1988). *La construcción de las ciencias físico-químicas*. Valencia: Nau llibres. [239]

CALVO, C. (1998). Bases para una propuesta didáctica sobre integrales (Reseña de Tesis de Maestría). *Enseñanza de las Ciencias,* 16 (1), pp.194-195. [11, 67, 71, 95, 195, 228]

CARRASCOSA, J. (1985). Errores conceptuales en la enseñanza de la Física y la Química: una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias*, 3 (3), pp. 230-234. [94]

CARRASCOSA, J. (1987). *Tratamiento didáctico en la enseñanza de las ciencias de los errores conceptuales.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. [239]

CARRASCOSA, J., MARTÍNEZ, B. y MARTÍNEZ TORREGROSA, J. (2000). *Física y Química. 1º Bachillerato.* Madrid: Santillana. [239]

CAUCHY, A. L. (1821). *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique*. Edición Facsímil de la primera edición. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 1998. [41]

COLOMBO, L., SALINAS, J. y PESA, M. (1995). Distintos tipos de constantes en Física y aprendizaje significativo de la disciplina. *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (2), pp. 237-248. [239]

CONFREY, J. Y SMITH, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 135-164. [11, 99]

CONLEY, M.R. *et al.* (1992). Student perceptions of projects in learning calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,*23 (2), pp. 175-192. [92, 228]

COTTRILL, J. *et al.* (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, pp. 167-182. [42, 62, 67, 95]

CUENCA, J.A. (1986). Iniciación al análisis no estándar (1ª, 2ª y 3ª parte). *Revista de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales",* nº 5 (pp. 34-48), 6 (pp. 42-51) y 7 (pp. 27-43). [32, 33, 44, 98, 228]

CHARALAMPOS, T. (1993). What is the fundamental theorem of integral calculus? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 24 (5), pp. 685-687. [72, 241]

DEL CARMEN, L. y JIMÉNEZ, M.P. (1997). Los libros de texto: un recurso flexible. *Alambique*, 11, pp. 7-14. [110]

DEL CASTILLO, F. (1980). *Análisis Matemático II.* Madrid: Alhambra. [48, 72]

DÍAZ, J. Y JIMÉNEZ, M. P. (1999). Aprender ciencias, hacer ciencias: resolver problemas en clase. *Alambique*, 20, pp. 9-16. [232]

DIEUDONNÉ, J. (1960). *Fundamentos de Análisis Moderno.* Barcelona: Reverté, 1974. [58]

DRIVER, R. (1986). Psicología cognoscitiva y esquemas conceptuales de los alumnos. *Enseñanza de las Ciencias*, 4 (1), pp. 3-16. [94]

DRIVER, R.; NEWTON, P. Y OSBORNE, J. (2000). Establishing the Norms of Scientific Argumentation in Classrooms. *International Journal of Science Education*, pp. 287-312. [236]

DRIVER, R. y OLDHAM, V. (1986). A constructivist approach to curriculum development in science. *Studies in Science Education*, 13, pp. 105-122. [232, 239]

DUSCHL, R. (1990). *Restructuring science education: The role of theories and their importance*. Columbia University, New York: Teacher College Press. [232]

DUSCHL, R.A. (1995). Más allá del conocimiento: los desafíos epistemológicos y sociales de la enseñanza mediante el cambio conceptual. *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (1), pp. 3-14. [232]

EDWARDS, C.H. (1937). *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer-Verlag, 1979. [29, 37, 41, 133]

EINSTEIN, A. e INFELD, L. (1939). *La física una aventura del pensamiento*. Buenos Aires: Losada. [383]

ESPINOZA, L. (1995). *Un estudio del sistema de enseñanza secundario en torno al concepto de límite*. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Barcelona. Reseña en: *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (2), pp. 264-265. [95]

EVES, H. (1981). *Great moments in Mathematics (After 1690).* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, nº 7. [39]

FERRINI-MUNDY, J. Y GEUTHER GRAHAM, K. (1991). An Overview of the Calculus Curriculum Reform Effort: Issues for Learning, Teaching, and Curriculum Development. *The American Mathematical Monthly,* 98 (7), pp. 627-635. [11, 62, 92, 95, 99, 228]

FERRINI-MUNDY, J. Y GAUDARD, M. (1992). Secondary school calculus: preparation or pitfall in the study of college calculus? *Journal for Research in Mathematics Education*, 23 (1), pp. 56-71. [91, 92, 93, 95, 241]

FERRINI-MUNDY, J. Y LAUTEN, D. (1994). Learning about Calculus Learning. *The Mathematics Teacher*, 87 (2), pp. 115-121. [96, 241]

FILOTTO, D. (1991). Infinitesimal sizes in numerical analysis. Some algorithms for computing lengths, areas, volumes. The graph of the integral function. *L'ensegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 14 (8), pp. 743-760. [228]

FREUDENTHAL, M. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company. [35, 43, 45, 384]

FURIÓ, C. (1994). *La enseñanza-aprendizaje de las ciencias como investigación: un modelo emergente.* En: Proceedings International Conference "Science and Mathematics Education for the 21 st century: towards innovatory approaches", vol. I, pp. 154-188. Concepción, Chile: Universidad de Concepción. [232]

FURIÓ, C. y GIL, D. (1978). *El programa-guía: una propuesta para la renovación de la Didáctica de la Física y la Química en el Bachillerato.* ICE. Universidad de Valencia. [239]

FURIÓ, C. y GIL, D. (1989). La didáctica de las ciencias en la formación inicial del profesorado: una orientación y un programa teóricamente fundamentados. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), pp. 257-266. [298]

FURIÓ, C. Y GUISASOLA, J. (1998). Construcción del concepto de potencial eléctrico mediante el aprendizaje por investigación. *Revista de Enseñanza de la Física*, 11 (1), pp. 617-618. [232]

GARRET, R.M., SATTERLY, D., GIL, D. y MTNEZ. TORREGROSA, J. (1990). Turning exercises into problems: an experimental study with teachers in training. *International Journal of Science Education,* 12, pp. 1-12. [94]

GIL, D. (1991). ¿Qué hemos de saber y saber hacer los profesores de ciencias? *Enseñanza de las Ciencias*, 9 (1), pp. 69-77. [298]

GIL, D. (1993). Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación. *Enseñanza de las Ciencias*, 11 (2), pp. 197-212. [232]

GIL, D. y CARRASCOSA, J. (1985). Science learning as a conceptual and methodological change. *European Journal of Science Education,* 7(3), pp. 231-236. [94]

GIL, D. y CARRASCOSA, J. (1990). What to do about science misconceptions? *Science Education*, 74 (5), pp. 531-540. [239]

GIL, D., CARRASCOSA, J., *et al*. (1991). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*. Madrid: ICE/Horsori. [232, 239]

GIL, D., CARRASCOSA, J., *et al*., (1999). ¿Puede hablarse de consenso constructivista en la educación científica? *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), pp. 503-512. [232]

GIL, D., FURIÓ, C., *et al.* (1999). ¿Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz y papel y realización de prácticas de laboratorio? *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (2), pp. 311-320. [233, 236]

GIL, D. y MTNEZ. TORREGROSA, J. (1983). A model for problem solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, 7 (3), pp. 231-236. [239]

GIL, D. y MTNEZ. TORREGROSA, J. (1987). Los programas-guía de actividades: una concreción del modelo constructivista del aprendizaje de las ciencias. *Investigación en la Escuela,* 3, pp. 3-12. [232, 239]

GIL, D., MTNEZ. TORREGROSA, J. y SENENT, F. (1988). El fracaso en la resolución de problemas: una investigación orientada por nuevos supuestos. *Enseñanza de las Ciencias,* 6 (2), pp. 131-146. [94]

GIL, D. y PAYÁ, J. (1988). Los trabajos prácticos de Física y Química y la metodología científica. *Revista de Enseñanza de la Física*, 2 (2), pp. 73-79. [94, 239]

GIL, D. y VALDÉS, P. (1996). La orientación de las prácticas de laboratorio como investigación: un ejemplo ilustrativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 14 (2), pp. 155-163. [239]

GIL, D. y VILCHES, A. (1999). Problemas de la Educación Científica en la enseñanza Secundaria y en la Universidad: contra las evidencias. *Revista Española de Física*, 13 (5), pp. 10-15. [242]

GONZALEZ URBANEJA, P.M. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias,* 9 (3), pp. 281-289. [31, 45, 98, 240]

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.* Madrid: Alianza Universidad. [29, 31, 38]

GOOD, R. (1991). Editorial: Research on Science-Mathematics connections. *Journal of Research in Science Teaching*, 28(1), p. 109. [11, 99]

GUISASOLA, J. y DE LA IGLESIA, R. (1997). “Erein Projectua”: Proyecto de Ciencias para la ESO basado en el planteamiento de situaciones problemáticas. *Alambique*, 13, pp. 83-93. [239]

HALLEZ, M. (1989). Les ouvrages de Mathematiques pour l'enseignement (XIXème - XXème). En: *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe III)*. Université Paris 7: IREM et LDPES. [48]

HASHWEH, M.Z. (1986). Towards an explanation of conceptual change. *European Journal of Science Education*, 8 (3), pp. 229-249. [239]

HAYMAN, J.L. (1981). *Investigación y educación.* Barcelona: Paidós. [104, 384]

HEWSON, M.G. y HEWSON, P.W. (1984). Effects of instruction using student prior knowledge and conceptual strategies on science learning. *European Journal of Science Education*, 6(1), pp. 1-6. [104]

HIERREZUELO, J. y MONTERO, A. (1988). *La ciencia de los alumnos*. Vélez-Málaga: Elzevir, 1991. [94]

HODSON, D. (1988). Towards a philosophically more valid curriculum. *Science Education*, 72 (1), pp. 19-40. [239]

HODSON, D. (1992 *a*). In search of a meaningful relationship: an exploration of some issues relating to integration in science and science education. *International Journal of Science Education*, 14 (5), pp. 541-566. [232]

HODSON, D. (1992 *b*). Assesment of practical work. Some considerations in philosophy of science. *Science and Education*, 1 (2), pp. 115-144. [239]

HODSON, D. (1994). Hacia un enfoque más crítico del trabajo de laboratorio. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (3), pp. 299-313. [239]

HOWE, A.C. (1996). Development of Science Concepts within a Vigotskyan Framework. *Science Education*, 80 (1), pp. 35-51. [249]

HULL, L.W. (1959). *Historia y Filosofía de la Ciencia.* Barcelona: Ariel, 1981. [29]

INTERNATIONAL UNION OF PURE AND APPLIED PHYSICS (Commision SUN/AMCO) (1987). *Symbols, units, nomenclature and fundamental constants in physics.* Revisión preparada por: Cohen, E.R. y Giacomo, P. Netherlands: Physica 146ª. [34, 258]

JHONSON, K. (1995). Harvard Calculus at Oklahoma State University. *The American Mathematical Monthly*, 102 (9), pp. 794-797. [92, 93, 228, 240]

KAISER, E. (1991). Instantaneus Velocity: A Different Approach. *The Physics Teacher*, 29 (6), p. 394. [241]

KHUN, S. (1991). The Derivative á la Carathéodory. *The American Mathematical Monthly,* 98 (1), pp. 40-44. [98, 228]

KLEINFELD, M. (1996). Calculus: Reformed or Deformed? *The American Mathematical Monthly*, 103 (3), pp. 230-232. [93, 228]

KLINE M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 6ª Ed., 1980. (Versión en español: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Universidad, 1992). [28, 29, 34, 36, 37, 38]

KNISLEY, J. (1997). Calculus: A Modern Perspective. *The American Mathematical Monthly,* 104 (8), pp. 724-727. [93]

KOPEL, D. y SCHRAMM, M. (1990). A New Extension of the Derivative. *The American Mathematical Monthly,* 97 (3), pp. 230-233. [93, 228, 241]

KOSSAK, R. (1996). What Are Infinitesimals and Why They Cannot Be Seen? *The American Mathematical Monthly*, 103 (10), pp. 846-853. [33, 42]

LAUGWITZ, D. (1997 *a*). On the Historical Development of Infinitesimal Mathematics. Part I: The algoritmic thinking of Leibniz and Euler. *The American Mathematical Monthly*, 104 (5), pp. 447-455. [36, 40]

LAUGWITZ, D. (1997 *b*). On the Historical Development of Infinitesimal Mathematics. Part II: The conceptual thinking of Cauchy. *The American Mathematical Monthly*, 104 (7), pp. 654-663. [42]

LAUTEN, D., GRAHAM, K. y FERRINI-MUNDY, J. (1994). Student Understanding of Basic Calculus Concepts: Interaction with the Graphics Calculator. *Journal of Mathematical Behavior*, 13, pp. 225-237. [42, 62, 67, 95]

LAVALY, A. (1990). Do students find physics easier to learn without mathematical problems? *Physics Education,* 25, pp. 202-204. [97]

LÓPEZ DE LOS MOZOS, M.C. (1991). Aproximación didáctica al concepto de derivada. *Revista Números,* 21, pp. 7-14. [11, 92, 241]

LÓPEZ-GAY, R., AGUILAR, R., CARMONA, A., GALERA, A. y MARTÍN, J.A. (1996). Memoria del Proyecto de Investigación Educativa: *La enseñanza- aprendizaje de la física en la etapa secundaria post-obligatoria (16-18 años) desde una perspectiva constructivista.* Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. [255]

LÓPEZ-GAY, R. y MTNEZ. TORREGROSA, J. (1997 *a*). El uso del Cálculo diferencial en la enseñanza de la Física y Química en el Bachillerato: ¿una ayuda o un obstáculo? *Enseñanza de las Ciencias, nº extra (V Congreso),* pp. 397-398. [238]

LÓPEZ-GAY, R. y MTNEZ. TORREGROSA, J. (1997 *b*). La introducción y uso del concepto de "diferencial" en los textos de física y Química en el Bachillerato: ¿favorece un aprendizaje con comprensión? *Enseñanza de las Ciencias, nº extra (V Congreso),* pp. 399-400. [238]

LÓPEZ-GAY, R., MTNEZ. TORREGROSA, J. y GRAS MARTI, J. (2001). What is the meaning and use of this expresion: dN = á· N· t^2· dt? *International Conference Physics Teacher Education Beyond 2000. Selected Contributions.* R. Pintó & S. Surinach (eds.). Paris: Elsevier Editions. [238]

MACHOVER, M. (1993). The place of Nonstandard Analysis in Mathematics and in Mathematics Teaching. *British Journal for the Philosophy of Science,* 44, pp. 205-212. [33]

MARCHESI, A. y MARTÍN, E. (1998). *Calidad de la enseñanza en tiempos de cambio.* Madrid: Alianza Editorial (Psicología y Educación). [242]

MARTIN, D. y COLEMAN, J. (1994). Mathematics for mature student acces to HE courses in physics: the Coventry perspective. *Physics Education*, 29, pp. 20-22. [10, 97, 228, 241]

MARTÍNEZ TORREGROSA, J. (1987). *La resolución de problemas de física como investigación: un instrumento de cambio metodológico*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. [239]

MARTÍNEZ TORREGROSA, J., DOMÉNECH, J.L. y VERDÚ, R. (1993). Del derribo de ideas al levantamiento de puentes: la epistemología de la ciencia como criterio organizador de la enseñanza en las ciencias física y química. *Qurriculum*, 6-7, pp. 67-89. [239]

MARTÍNEZ TORREGROSA, J. y LÓPEZ-GAY, R. (1992 *a*). La evolución del concepto de diferencial y la comprensión de su significado por profesores y alumnos. *International Conference on History of the Physical-Mathematical Sciences and the Teaching of Sciences*, pp. 132-136. Madrid: European Physical Society. [238]

MARTÍNEZ TORREGROSA, J. y LÓPEZ-GAY, R. (1992 *b*). La introducción y utilización de la diferencial en el contexto de la física. *Física 92 - 8ª Conferencia Nacional de Física y 2º Encontro Ibérico para o Ensino da Física,* pp. 538-539. Vilareal, Portugal: Didáctica Editora. [238]

MARTÍNEZ TORREGROSA, J. y LÓPEZ-GAY, R. (1993). El uso del concepto de diferencial en la enseñanza de la Física. *Enseñanza de las Ciencias, nº extra (IV Congreso),* pp. 259-260. [238]

MARTÍNEZ TORREGROSA, J., GIL, D. y VERDÚ, R. (1999). La evaluación en una enseñanza de la Física como construcción de conocimientos. *Educación Abierta*, 140 (*Aspectos didácticos de Física y Química (Física)*, 8) Zaragoza: ICE U. de Zaragoza. [239]

MARTÍNEZ TORREGROSA, J. *et al.* (1998). *La estructura de todas las cosas*. Alicante: Aguaclara. [239]

MARTÍNEZ TORREGROSA, J. *et al.* (1999). *El movimiento de todas las cosas*. Alicante: Aguaclara. [239, 255]

MARTÍNEZ TORREGROSA, J., LÓPEZ-GAY, R., *et al.* (en prensa). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la Física. *Enseñanza de las Ciencias* (admitido para publicación en 2001). [238]

MATTHEWS, M.R. (1994 *a*). Vino viejo en botellas nuevas: un problema con la epistemología constructivista. *Enseñanza de las Ciencias,* 12 (1), pp. 79-88. [30]

MATTHEWS, M.R. (1994 *b*). Historia, filosofía y enseñanza de las ciencias: la aproximación actual. *Enseñanza de las Ciencias,* 12 (2), pp. 255-277. [30, 61, 98]

MENIGAUX, J. (1989). La différentielle dans les manuelset polycopies de physique. En: *Procedures différentielles dans les enseignements de mathematiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire (Annexe V)*. Université Paris 7: IREM et LDPES. [100]

MONK, M. (1994). Mathematics in physics education: a case of more haste less speed. *Physics Education*, 29 (4), pp. 209-211. [10, 11, 97, 99, 240]

MORENO, L. Y WALDEGG, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 2, pp. 211-231. [95]

MURA, R. (1993). Images of Mathematics Held by University Teachers of Mathematical Sciences. *Educational Studies in Mathematics,* 25 (4), pp. 375-385. [99, 298]

MURA, R. (1995). Images of Mathematics Held by University Teachers of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics,* 28 (4), pp. 385-399. [99, 298]

NAGY, P., TRAUB, R.E., MACRURY, K., KLAIMAN, R. (1991). High School Calculus: comparing the content off assignments and tests. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22 (1), pp. 69-75. [93, 436]

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principle and Standards for School Mathematics.* http://standards.nctm.org/document. [92, 97, 98, 232, 236, 240, 241, 242, 247, 249, 298]

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1995). *National Standards for Science Education*. Washington D.C.: National Academy-Press. [232]

ORTON, A. (1983 *a*). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics,* 14, pp. 1-18. [11, 62, 92, 95, 96, 241]

ORTON, A. (1983 *b*). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics,* 14, pp. 235-250. [11, 45, 62, 92, 95, 96, 241]

OSBORNE, R. y WITTROCK, M. (1985). Learning Science: a generative process. *Science Education*, 67, pp. 490-508. [94, 232]

OSTEBEE, A. y ZORN, P. (1997). Pro Choice. *The American Mathematical Monthly*, 104 (8), pp. 728-730. [93, 228]

OTERO, J. (1985). Assimilation problems in traditional representation of scientific knowledge. *European Journal of Science Education*, 7 (4), pp. 361-369. [235]

OTERO, J. (1997). El conocimiento de la falta de conocimiento de un texto científico. *Alambique*, 11, pp. 15-22. [110]

PARKER, B. (1994). Maths in physics teaching. *Physics Education,* 29 (1), p. 1. [11, 99]

PAYÁ, J. (1991). *Los trabajos prácticos en la enseñanza de la Física y la Química: un análisis crítico y una propuesta fundamentada.* Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. [94, 239]

POZO, J.I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata. [232]

RAMÍREZ, L., GIL, D. y MARTÍNEZ TORREGROSA, J. (1994). *La resolución de problemas de Física y Química como investigación*. Madrid: CIDE/MEC. [239]

REYES, J.V. (1991). *La resolución de problemas de química como investigación: una propuesta didáctica basada en el cambio metodológico.* Tesis doctoral. Universidad del País Vasco. [239]

RICE-EVANS, P. (1994). BSc in Natural Philosophy: a fresh proposal. *Physics Education*, 29 (1), pp. 23-25. [97]

RIVAS, M. (1986). Factores de eficacia escolar: una línea de investigación didáctica. *Bordón*, 264, pp. 693-708. [242]

ROSSI, P. (1997). *El nacimiento de la ciencia moderna en Europa.* Barcelona: Crítica, 1998. [28, 29, 36, 39]

RUTTER, P. (1994). The effect of studying A-level mathematics on performance in A-level. *Physics Education,* 29 (1), pp. 8-13. [11, 97, 228]

SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto *límite de una función*: una perspectiva desde la noción de *obstáculo*. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (1), pp. 73-84. [42, 62, 67, 95, 241]

SCHNEIDER, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11 (23), pp. 241-294. [33, 37, 60, 70, 92, 96, 401]

SCHNEIDER, M. (1992). A propos del l'apprentissage du taux de variation instantane. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 317-350. [11, 29, 42, 62, 67, 96, 240, 259, 260]

SEMINARIO DE FÍSICA Y QUÍMICA (1990). *La construcción de las ciencias físico-químicas. Programas-guía de trabajo y comentarios para el profesor*. Valencia: Nau Llibres. [255]

SPEISER, B. y WALTER, C. (1994). Catwalk: First-Semester Calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, 13, pp. 135-152. [96, 241, 247]

STINNER, A. (1990). Philosophy, thought experiments and large context problems in the secondary school physics course. *International Journal of Science Education,* 12 (3), pp. 244-257. [240]

SWANN, H. (1997). Commentary on Rethinking Rigor in Calculus: The Role of the Mean Value Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 104 (3), pp. 241-245. [93]

THOMPSON, P.W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 229-274. [92, 228, 240, 298]

THOMPSON, P.W. y THOMPSON, A. (1994). Talking about rates conceptually. Part I: Teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (3), pp. 279-303. [11, 92, 96]

THOMPSON, P.W. y THOMPSON, A. (1996). Talking about rates conceptually. Part II: Mathematical Knowledge for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (1), pp. 2-24. [95, 241, 298]

TOBIN, K. Y ESPINET, M. (1989). Impediments to change: applications of coaching in high school science teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, 26 (2), pp. 105-120. [298]

TRZCIENIECKA-SCHNEIDER, I. (1993). Some remarks on creating mathematical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, pp. 257-264. [241]

TUCKER, T. (1997). Rethinking Rigor in Calculus: The Role of the Mean Value Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 104 (3), pp. 231-240. [97, 241]

TURÉGANO, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal*. Tesis Doctoral: Universidad de Valencia. [195, 228]

TURÉGANO, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias,* 16 (2), pp. 233-249. [11, 67, 95, 96, 195]

UNESCO (1975 *a*). De la Enseñanza Media a la Enseñanza Superior. En: *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Física, Vol. III, Cap. 5,* pp. 74-92. [12]

UNESCO (1975 *b*). La interfase entre la Física y la Matemática. En: *Nuevas tendencias en la enseñanza de la Física, Vol. III.* pp. 203-225. [12, 91, 99, 227]

VERMA, G.K. y BEARD, R.M. (1981). *What is educational research*. London: Gower. [383]

VIENNOT, L. (1976). *Le Raisonnement Spontané en Dynamique Elémentaire.* Tesis Doctoral: Université Paris 7. Herman: Paris. [94]

VIGOTSKY, L.S. (1984) (original de 1934, trabajo póstumo). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. *Infancia y Aprendizaje*, 27-28, pp. 105-116. [249]

WALLET, G. (1982). L'origine du calcul différentiel chez Leibniz. En: *Histoire des Mathématiques. La rigueur et le calcul.* Cedic: París. [38]

WELKOWITZ, J., EWEN, R.B., COHEN, J. (1976). *Estadística aplicada a las Ciencias de la Educación.* Madrid: Santillana, 1981. [161]

WESTFALL, R.S. (1977). *La construcción de la ciencia moderna*. Barcelona: Labor, 1980. [30]

WHEATLEY, G.H. (1991). Constructivist perspectives on science and mathematics learning. *Science Education*, 75 (1), pp. 9-21. [232, 239]

WHITE, P. y MITCHELMORE, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27 (1), pp. 79-95. [92, 95, 96, 240, 241]

WILLIAMS, S. (1991). Models of limit held by College calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22 (3), pp. 219-236. [42, 62, 67, 95]

WILSON, *et al.* (1986). *Research methods in education and the social sciences.* Colección de 8 volúmenes. U.K.: Open University Press. [104]

WOOLNOUGH, B.E. (1994). Why student choose physics, or reject it. *Physics Education*, 29 (6), pp. 368-374. [240, 298]

ZOLLER, U. (1999). Scaling-Up of Higher-Order Cognitive Skills-Oriented College Chemistry Teaching: An Action-Oriented Research. *Journal of Research in Science Teaching*, 36 (5), pp. 583-596. [232]