El model interpretatiu de *de Broglie-Bohm-Bell* i la didàctica en Mecànica Quàntica

Guillem Gómez Blanch

guillemgoblanc@ctv.es

VALFEX: Valenciana de Física Experimental

1. Introducció

La Mecànica Quàntica és la part de la Física que s´ocupa de l´estudi del que s´anomena “món microscòpic”, és a dir: molècules, àtoms i partícules elementals.

Fins a la fi del segle XIX amb la mecànica de Newton i la teoría electromagnètica de Maxwell n'hi havia prou per a explicar el món. Però a partir d´eixa època, la necessitat d´explicar nous fenòmens desconeguts fins aleshores (radiació del cos negre, efecte fotoelèctric,..) donà lloc al naixement del que avui es coneix com a Mecànica Quàntica.

Als anys vint s´assentaren les bases d´aquesta teoría, i des del principi també sorgí la polèmica davant de la seua interpretació, esdevenint "ortodoxa” l'anomenada “interpretació de Copenhague”, deguda en gran part al físic danés Niels Bohr i els seus col.laboradors . Es la que es considera correcta per gran part de la comunitat científica i així al menys s´ensenya a les facultats de Física. Cal dir amés que les seues previssions estàn en un gran acord amb la realitat.

Però ja de del principi s´alçaren veus en contra d´aquesta interpretació, veus de Físics molt importants com Einstein i de Broglie. I per què?

Doncs perquè l´assumpció d´aquesta interpretació ens obliga a acceptar elements un tant "especials": l´indeterminisme, la negació de la imatge física de l'esdevenir del fenòmen i en particular del concepte de trajectòria, la no-causalitat... i fins i tot la negació de l´existència d´una realitat objectiva fora de les mesures concretes en un determinat moment. "El fenòmen només ho és fins a ser un fenòmen observat"

Preguntes tan senzilles com el camí seguit per una partícula (per exemple un electró) per anar des d´un punt A fins un punt B, no és que la Mecànica Quàntica Ortodoxa no puga respondre-les, és sinplement que dins el marc d´aquesta teoría no té sentit fer-les.

I és que l'interpretació ortodoxa, fugint del determinisme clàssic , ha adoptat una altra filosofía:el positivisme. Mantenim que aquesta filosofía impedeix una correcta relació teoría realitat i, en conseqüència obstaculitza la seua comunicació als estudiants.

La divisió entre un món macroscòpic governat per lleis deterministes causals i un món microscòpic governat per lleis no deterministes (tanmateix l'equació de Schrödinger, el seu "cor", és totalment "determinista") i no causals, dóna lloc a una insatisfactòria imatge fsica del món, ja que es crea una discontinutat món macroscòpic/món microscòpic que no té sentit si el que volem és una explicació coherent de la realitat. No és raonable pensar en comportaments diferents de la natura depenent de l´ordre de magnitud que considerem.

Tot això té unes implicacions didàctiques molt importants, perquè l'estudiant es troba generalment incòmode amb un ambient d'incerteses i incoherències en una ciència com la Física de la què hom espera precissament el contrari. Probablement algunes vocacions científiques han estat estroncades per aquestes consideracions.

La nostra proposta, doncs, és: cal que els educadors en Mecànica Quàntica coneguen el model de Broglie-Bohm , puguen justificar front els alumnes el seu ús i el seu status veritable de model alternatiu (almenys pel que sabem fins ara) i que puguen donar imatges ni que siguen mínimalistes dels fenòmens "estratègics" tals com atoms hidrogenoides, difracció d'electrons, efecte túnel, paradoxa Einstein-Podolski-Rosen , etc.

2. El model realista de la mecànica quàntica

Aquestes mancances han dut molts físics a plantejar-se una altra interpretació de la Mecànica Quàntica que anomenem realista , causal o no local, formulada primerament de manera incomplerta per de Broglie i, independentment reformulada per D. Bohm i desenvolupada per J. S. Bell entre d'altres. (Hi ha també el "realisme local", defensat per Einstein, que la paradoxa Einstein-Podolski-Rosen i la seua conprovació experimental, dissenyada per Bell, justament ha invalidat.) .

Les previssions del model realista de Bohm coincideixen amb les de la mecànica quàntica ortodoxa, fonamentalment degut al fet que parteixen ambdues de l'equació de Schrödinger. De fet, d'una manera pragmàtica hom podría considerar una certa fussió d'ambdues formulacions,

Els trets fonamentals del model realista, esquematitzats, són els següents:

1)Un sistema físic compren una ona propagant-se en l'espai i el temps i una partícula puntual que es mou continuament sota el giatge de l'ona

. Es a dir, dit sistema físic individual descriu una trajectòria en l'espai-temps.

2) L'ona és descrita matemàticament per la funció d'ona ψ(x, t), que és una solució de l'equació de Schrödinger, (talment com en la interpretació usual, on també és axioma)

3) El moment linial de la partícula és igual al gradient de la fase de la funció d'ona ψ(x, t). (el que permet determinar l'equació de la trajectòria si se suposen unes condicions inicials.). O equivalent: la partícula es veu sotmesa a una força derivada del "potencial quàntic".

Vegem això amb un mínim de detall, pèr tal de treure conclussions sobre les trajectòries

Siga un sistema físic descrit per la funció complexa de les coordenades espai-temporals ψ(x, t) que podem expressar en forma polar: (h constant reduïda de Planck, habitualment h/2π)

$$\Psi = Re^{\frac{iS}{h}}$$

on R és l'amplitud real i S la fase, també real, ambdós funcions de la posició i el temps.

La funció d'ona, com en l'interpretació usual, deu d'ésser solució de l'equació de Schrödinger:

Substituint la forma polar de ψ i separant la part real i la imaginària en dues equacions obtenim:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\nabla^2 S}{2m} + V - \frac{h^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \qquad ih\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(-\frac{h^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi$$

I per a la part imaginaria:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \nabla\left(\frac{R^2 \nabla S}{m}\right) = 0$$

Aquestes equacions són molt importants en el model interpretatiu . La pri-

$$Q = -\frac{h^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$$

mera és molt semblant a l'equació clàssica de la mecànica anomenada de Hamilton-Jacobi, si exceptuem el darrer terme. Com era d'esperar el darrer terme desapareix si passem de la mecànica quàntica a la clàssica (h$\rightarrow$0) . Tot esdevé, doncs com si aparegués un "potencial quàntic" que s'afegeix algebraicament al clàssic V .

La segona ens permet introduir la probabilitat . Assimilant la densitat de probabilitat P al quadrat de l'amplitud de la funció d'ona, com en l'interpretació habitual, i assimilant la velocitat de la partícula a :

obtenim:

$$\vec{v} = \frac{\nabla S}{m}$$

que expressa la conservació de la (densitat de) probabilitat

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla.(P\vec{v}) = 0$$

El model de Broglie-Bohm-Bell i la didàctica en mecànica quàntica

3. Deducció general de les trajectòries de partícules

Com hem dit a 2 ,per a que hi haja coherència amb la definició de corrent de probabilitat, hom associa la tangent a la trajectòria un valor que fa que la velocitat es puga expressar com a:

$$\vec{v} = \frac{\nabla S}{m}$$

D'on resulta que, si coneixem S(x,t) podrem derivar el vector velocitat i, assignant uns valors inicials a la posició- que no serán valors mesurats a no ser que interaccionem fortament amb el sistema i aleshores, pel principi d'incertesa de Heisenberg, el moviment quede incontroladament alterat- procedir a obtenir l'equació horaria del moviment x(t).Aleshores, la trajectòria trobada és una trajectòria possible, sempre que el valor inicial també ho siga.

D'ací sorgeix inmediatament el carácter no-local del model interpretatiu de Broglie-Bohm: si el sistema quàntic no és individual ans col.lectiu,siga per exemple de dues partícules, la funció d'ona dependirà de les coordenades de les dues; d'aquesta manera, la trajectòria d'una d'elles dependirà de la posició de l'altra, encara que estiguen separades espacialment. Per exemple per a la partícula 1:

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt} = \frac{1}{m_1} \nabla_1 S(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

on el gradient és per a les coordenades de1. Això té una gran importància en la interpretació de la paradoxa EPR.

Notem que el sistema evoluciona matemàticament en "l'espai de les fases", en aquest cas de 6 dimensions espacials i el temps. El fenòmen que "apareix", però, és "una projecció" en l'espai tridimensional i en un lloc determinat. Aquest fet té un enorme contingut físic.

Una altra manera d'acostar-se a la determinació de trajectòriesés la següent.Considere de nou que tractem amb una partícula ; plantegem la segona equació de Newton tenint en compte el "potencial quàntic". Ale s-hores tenim:

$$m.\vec{a} = \nabla(V - \frac{h^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R})$$

Aleshores podem integrar les equacions que resulten del problema concret, amb les corresponents condicions de contorn incloent els valors inicials.

Notem la complicada dependència de la força quànt ica F q respecte a R i , més exactament , de la "forma" de R en l'espai.

$$\vec{F}_q = \nabla(-\frac{h^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R})$$

En llocs amb R dèbil (denominador) i forta variació (numerador) podrem esperar intenses forces. Adonem-nos també que, en absència de potencial extern, la partícula estarà sotmesa a forces no nul.les i, en cons e-qüènccia, no descriuràli nies rectes.

Naturalment ens limitem a escenaris elementals de la mecànica quàntica no relativista, on parlar de trajectòries té un sentit físic (p.e. no hi ha creació aniquilació de partícules)

Des del punt de vista didàctic creiem que és possible, sense adoptar posicions "heterodoxes", utilitzar el model realista a nivell de descripció de trajectòries. Això permet una descripció física del que passa en situacions experimentals tals com el de difracció per doble escletxa, efecte "tunel" a travers d'una barrera de potencial, orbites d'electrons en atoms hidrogenoï ds,etc.

4. Exemples de calculs de trajectòries

4.1. Electró en un atom d'hidrògen

En coordenades polars, la funció d'ona d'un electró d'energía E i nombres quantics l (moment angular) i m azimutal es pot expressar com a producte d'una funció real g funció de la coordenada r, d'una funció real proporcional a un polinomi de Legendre f i d'una exponencial tal com :

$$y_{E,l,m}(r,q,j) = g_{E,l,m}(r)\,f_{l,m}(J)e^{i(mj - Et/h)}$$

En conseqüència la funció de fase és, apart d'una constant:

$$S(r,q,j,t) = mh\,j - Et$$

A partir de S plantegem les equacions de les components de la velocitat:

O siga, r=r0 : el radi de l'orbita és constant

$$v_r = \dot{r} = \frac{1}{m_o}\frac{\partial S}{\partial r} = 0 \qquad v_J = r\dot{j} = \frac{1}{m_o r}\frac{\partial S}{\partial q} = 0$$

Per a la coordenada angular azimutal θ:

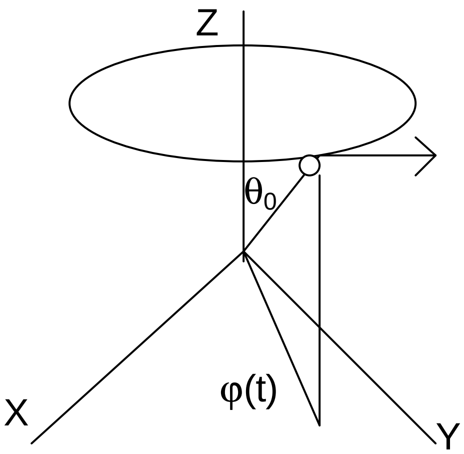
Es a dir: l'angle θ =θ0 és també constant

Finalment per a la coordenada angular φ:

$$v_j = rsin\, q\, \dot{j} = \frac{1}{m_o\, rsin\, q}\frac{\partial S}{\partial j} = \frac{mh}{m_0\, rsin\, J}$$

Integrant φ respecte a t i substituint condicions inicials tenim:

$$j = j_0 + \frac{mht}{m_0 r_0^2 \sin^2 J_0}$$



Es a dir: per a m=0 la partícula romà en repòs. Per a valors superiors la partícula descriu cercles en un pla que, en general, no conté al nucli, a diferència del model orbital de Bohr. Com més gran és el nombre quantic m, més depressa va la partícula.

4.2. Experiment de la doble escletxa

Siga una font de partícules (p.e. electrons) que incideix sobre una paret amb dues ranures i darrera la qual hi ha una pantalla. Si el fluix de partícules és gran, aleshores obtenim unes bandes d'interferència. Si l'emissió és partícula a partícula, cada vegada obtenim un punt i el conjunt de molts punts ens donen la mateixa figura de bandes d'interferència.

Front a la coneguda manca d'interpretació del fenòmen característica de la interpretació ortodoxa-el que no impedeix un exacte càlcul de les probabilitats i, en definitiva de la previsió de la figura experimental la interpretació realista és: la ona ψ passa per les dues escletxes i interfereix, talment com és propi de que facen les ones; la partícula es mou en l'espai sotsmesa a la força derivada del potencial quàntic. Recordem que aquesta força no necessariament és petita quan l'ona té petita amplitut,ans té una gran dependència de la variació espacial d'aquesta.

Es possible calcular el camp de trajectòries (Philippidis et al.,1979) .Si Y és la semidistancia entre escletxes i σ0 el semiample de l'escletxa, la funció dóna emergent dúna escletxa és de la forma:

$$y_{B0} = a(2ps_0)^{-1/4} e^{-\frac{(y-Y)^2}{4s_0} + i(k_1 x + k_2 (y-Y))}$$

I quelcom semblant per ala funció d'ona corresponent a l'altra escletxa, ψ'B0 , tot canviant Y per -Y.

Aleshores, en qualsevol punt de la zona entre les escletxes i la pantalla tenim que el camp total ψT =N(ψB0 +ψ'B0), amb n com a constant de normalització. Observant el carácter factoritzable de l'equació(funcions de x per funcions de y), integrem l'equació de la velocitat, obtenint una component molt senzilla en x i una equació diferencial de primer ordre prou complexa, que cal resoldre numèricament i que , suposant com sempre condicions inicials-en aquest cas punts de l'escletxa per a t=0, que fins i tot poden suposar-se distribuits normalment, ens donen equacions de trajectòries que reprodueixen les densitats de probabilitat en la pantalla.

Cal destacar , naturalment, que més enllà del resultat matemàtic està el fet que es pot aconseguir, analítica o numèricament i que és ple de sentit físic coherent amb les hipòtesis realitzades.

Bibliografía

P.R.Holland “The quantum theory of motion”.Cambridge University Presss 1993

ISBN 0 521 48543 6 Text recomanable com a referència tècnica general de la mecànica quàntica causal. Es un excel.lent tractat al respecte.

“Quantum Theory of measurement “,J.A.Wheeler and W.H. Zurek , 1983, Princenton University Press. Voluminos recull d'articles històrics, alguns dels quals citem a continuació (Com a "QTM").

David Bohm. “A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables, I and II”. Physical Review, 85, 166-93 (1952). QTM , p . 392

John S. Bell. “On the Einstein Podolsky Rosen Paradox”. Physics, 1, 195-200

(1964).QTM p. 403. Traducció al castellà a:

J.S.Bell “Lo decible e indecible en mecánica cuántica”, , Alianza Universidad nº 661, Madrid 1990. Llibre excel.lent, molt recomanable.

Philippidis et al. ,Nuovo Cimento (1982),52 B,15-28 i id. 71 B 75-87: detall del càlcul de trajectòries en la difracció d'electrons.

David Bohm "La totalidad y el orden implicado" Editorial Kairós Abril 1992

"Mecànica Quàntica Causal" , Guillem Gómez i Angel Oliva. Revista de Física, Societat Catalana de Física 2n semestre 1996